



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | 函数ノ单葉性ニ就テ                                                                   |
| Author(s)    | 能代, 清                                                                       |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1934, 12, p. 1-6                                                 |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/73872">https://doi.org/10.18910/73872</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

35. 函數ノ單葉性ニ就テ。

能代清(北大)

解析函數ノ單(複)葉性ニ就テ氣ノ附イタコトガヲ述ベテ見タイ。

大シク準備ヲシタワケデ"ナカラ不備ノ處ガアルカモ知レマセン。先ツ"本紙上談話會第9号, 25テ"高橋進一君カ"

$f(z) = z + \dots$  ヲ  $|z| < \rho$  ( $\rho > 1$ ) テ"正則トシタトキ  $|z| < \rho$  テ"

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < M(\rho)$$

ヲ満足スルヲバ"  $f(z)$  カ  $|z| < 1$  テ"單葉ナルコトガ"言イル様 +  $M(\rho)$ 。

決定ニ對スル"ノ解答ヲ初等的ノ方法デ"出シテ居リマスガ, 之ニ關シテ次ノ

様ナクシ一般적ノ考ヘ方ヲシテ見ヨウト思ヒマス。  $f(z) = z + \dots$  ヲ  $|z| < \rho$

( $\rho > 1$ ) テ"正則トシタ時, ココデ"  $f(z)$  ノ値ガ如何ナル領域  $D(\rho)$  ニ屬スル

トスレバ  $f(z)$  カ  $|z| < 1$  テ"單葉ナルコトガ"言イルカ。先ツ"  $\frac{f(z)}{z} \in D$  ト假

定スル。(但,  $D$  ハ少クトモ 三ツノ界點ヲ有スルモノトスル)。  $z = \rho t$  トオケハ"

$$\phi(t) = \frac{f(\rho t)}{\rho} = 1 + \dots \quad \text{ハ } |t| < 1 \quad \text{テ"正則且ツ"コ"テ"}$$

$$\frac{\phi(t)}{t} = \frac{f(\rho t)}{\rho t} = \frac{f(z)}{z} \in D$$

故ニ  $\phi(t)$  ハ  $|t| < R(D)$  テ"單葉ナル様 +  $R(D)$  ガ存在スル。(例リハ

ハ"正規族ノ理論ヲ用テ) 隨テ  $f(z) = \rho \phi\left(\frac{z}{\rho}\right)$  ハ  $|z| < \rho R(D)$  テ"

單葉ナル。  $\rho R(D) \geq 1$  ナル様 +  $D$  ヲ逆ニ探ス。

一例リトシテ  $D: \{z \mid |z| < M\}$  (勿論  $M > 1$ ) ノ場合ハ Dirichlet

ノ定理ヨリ

$\phi(t)$  は  $|t| < M - \sqrt{M^2 - 1}$  を"単葉(且星型)"と"アルカラ"

$f(z)$  は  $|z| < \rho(M - \sqrt{M^2 - 1})$  を"単葉"と"アル".

$$\rho(M - \sqrt{M^2 - 1}) \geq 1 \quad \text{ヨリ} \quad M \leq \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})$$

定理 1.  $f(z) = z + \dots$  を  $|z| < \rho$  ( $\rho > 1$ ) を"正則且"ツコト"

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho}) \quad (1)$$

トスバ",  $f(z)$  は  $|z| < 1$  を"単葉(實ハ星型)"と"アル. (1)ノ右辺ハヨリ大キク出来ナイ (之レハ Dieudonnéノ定理ガ精密トコトヨリワカル)

同様ニ  $D: 0 < |z| < M$  (勿論  $M > 1$ ) トミテ見イハ"

$\phi(t)$  は  $|t| < \log e M - \sqrt{(\log e M)^2 - 1}$  を"単葉(星型)"と"アルカラ"

$f(z)$  は  $|z| < \rho(\log e M - \sqrt{(\log e M)^2 - 1})$  を"単葉(星型)"と"アル.

$$\rho(\log e M - \sqrt{(\log e M)^2 - 1}) \geq 1 \quad \text{ヨリ} \quad M \leq e^{\frac{(\rho-1)^2}{2\rho}}$$

定理 2.  $f(z) = z + \dots$  を  $|z| < \rho$  ( $\rho > 1$ ) を"正則且"ツコト"

$$0 < \left| \frac{f(z)}{z} \right| < e^{\frac{(\rho-1)^2}{2\rho}} \quad (2)$$

トスバ",  $f(z)$  は  $|z| < 1$  を"単葉(實ハ星型)"トナル. (2)ノ右辺モ正確トモト"アル. (以上定理 1, 2ト結論北大紀要 II, 定理 3, 6 ヲ比較ニテ見テ下サイ)

$\frac{f(z)}{z} \in D$  ノ代リ  $f'(z) \in D$  トミテモ同様ノ議論ガ行キル. 例イハ"

定理 3.  $f(z) = z + \dots$  ガ  $|z| < \rho$  ( $\rho > 1$ ) を"正則トトキ"

$$|f'(z)| < \rho$$

トスバ"  $|z| < 1$  を"単葉(實ハ星型)"と"アル. コトキ  $\rho$  ハ最もヨイ値と"アル.

(拙著, 學士院記事, VIII (1933), No. 7, p. 275-277)

又  $\phi(t) = t + \dots$  が  $|t| < 1$  で正則且 "1" ココで

$$0 < |\phi'(t)| < M \quad (\text{明か} = M > 1)$$

トスル。  $0 < \left| \frac{\phi'(t)}{M} \right| < 1$

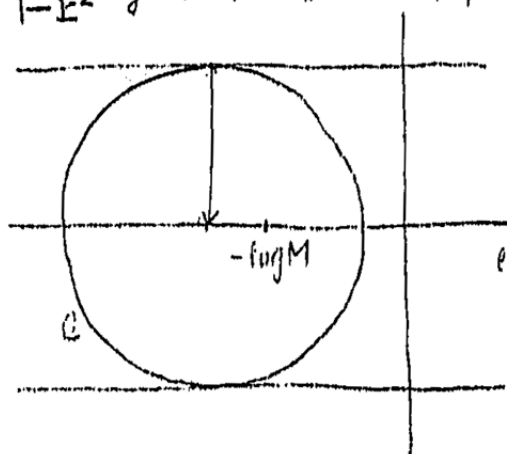
$$w = \log \frac{\phi'(t)}{M} = \log \left| \frac{\phi'}{M} \right| + i \arg \frac{\phi'}{M} = \log \left| \frac{\phi'}{M} \right| + i \arg \phi' \quad (\text{但し } \log 1 = 0)$$

トすハ  $w$  は  $|t| < 1$  で  $\Re(w) < 0$  トスル。  $|t| \leq r = \frac{1}{2}$  なる Schwarz,

lemma より  $\left| \frac{w + \log M}{w - \log M} \right| \leq r$  なる  $|t| \leq r$  内  $w = \log \frac{\phi'}{M}$  トル値

"1" の内  $C: \left| \frac{w + \log M}{w - \log M} \right| = r$  内又ハ上 = アル。  $C$  の半径ヲ求メルト

$$\frac{2r}{1-r^2} \log M \quad \text{ナル。} \quad \text{ヨリ} \quad \left| \arg \phi'(t) \right| \leq \frac{2r}{1-r^2} \log M \quad \text{for } |t| \leq r$$



$$\frac{2r}{1-r^2} \log M = \frac{\pi}{2} \quad \text{トすハ} \quad r_0 = -\frac{2}{\pi} \log M$$

$$+ \sqrt{\left( \frac{2}{\pi} \log M \right)^2 + 1} \quad \text{故} = |t| < r_0 \text{ トスハ}$$

$$|\arg \phi'| < \frac{\pi}{2} \quad \text{即チ} \quad \Re(\phi') > 0.$$

サテ  $\phi(t)$  が凸狀領域  $D$  で正則且  $\Re(\phi') > 0$  トスハ  $D$  で單葉ナル

ト云フ定理 (証明ハ近頃ニ出ル北大紀要ト出論, 桂谷先生ト非常ニ奇麗

ト幾何學的証明ハ尾崎君カ大塚數學雜誌 3 卷 p. 14 ト紹介ニテアル)

ト用ヒルト  $\phi(t)$  ハ  $|t| < r_0$  で單葉トスル。

注意  $0 < |\phi'(t)| < M$  トスハ  $\infty > |\phi'(t)| > m$  (但し  $m < 1$ ) ト

スバ  $0 < \left| \frac{1}{\phi'} \right| < \frac{1}{m} = M$  ヨリ  $|t| < r_0$  内  $\Re\left(\frac{1}{\phi'}\right) > 0$  即チ

$$\Re(\phi') > 0. \quad \text{ヨリ} \quad |t| < r_0 = -\frac{2}{\pi} \log \frac{1}{m} + \sqrt{\left( \frac{2}{\pi} \log \frac{1}{m} \right)^2 + 1} \quad \text{ト單葉ナル}$$

ナル。

從テ定理 1, 2, 証明ト同様ニシテ

定理 4.  $f(z) = z + \dots$  が  $|z| < \rho$  ( $\rho > 1$ ) で正則かつ、若し  
 $0 < |f'(z)| < e^{\frac{\pi}{4}(\rho - \frac{1}{\rho})}$   $|z| < \rho$

ならば  $f(z)$  は  $|z| < 1$  で単葉である。

定理 4'  $f(z) = z + \dots$  が  $|z| < \rho$  ( $\rho > 1$ ) で正則かつ、若し  
 $\infty > |f'(z)| > e^{-\frac{\pi}{4}(\rho - \frac{1}{\rho})}$   $|z| < \rho$

ならば  $f(z)$  は  $|z| < 1$  で単葉である。

吉田素井作君が  $f(z) = z + \dots$  が  $|z| < \rho$  ( $\rho > 1$ ) で正則かつ  
 $|z| < \rho$  で  $|f'(z)| > m(\rho)$  ならば  $f(z)$  が  $|z| < 1$  で単葉となるか？ 其中  
 $m(\rho)$  の存在に注意を要する。由であるから、 $m(\rho)$  は  $e^{-\frac{\pi}{4}(\rho - \frac{1}{\rho})}$  より大である。  
 出来ぬ。定理 4 及び 4' の右辺の制限が正確なものであることが知られていない。

次は話をかわして  $f(z)$  の複葉性に関しての注意をしておく。

$f(z)$  が全領域で正則かつ、異なる  $p+1$  個の点

$$z_1, z_2, \dots, z_{p+1}$$

で同じ値を取つたとする。凡て、点  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p+1$ ) の内部を任意  
 の単純な閉 (正則) 曲線  $C$  とする。

$$\int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2) \cdots (\zeta - z_{p+1})} = 0$$

証明は簡単である。先づ Cauchy の定理から  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$

1°  $p = 1$  のときは

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left( \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_2} \right) d\zeta = \frac{z_1 - z_2}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\zeta = 0$$

2°  $p = m$  のときは、もとより  $p = m+1$  を証明する。

$$z_1, z_2, \dots, z_{m-1}, z_m \quad (m \text{ 个}) \quad i)$$

$$z_1, z_2, \dots, z_{m-1}, z_{m+1} \quad (m \text{ 个}) \quad ii)$$

ヨリテ假定ヨリ

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2) \cdots (\zeta - z_{m-1})(\zeta - z_m)} d\zeta = 0 \quad i)'$$

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2) \cdots (\zeta - z_{m-1})(\zeta - z_{m+1})} d\zeta = 0 \quad ii)'$$

辺々相減シテ

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2) \cdots (\zeta - z_m)(\zeta - z_{m+1})} d\zeta = 0$$

注意、上ノ事實ハ  $z_1, z_2, \dots, z_{p+1}$  カ一部或ハ全部カ一致シテモ成立スルコトハ明カナル。コノ結果ヲ用ヒルト市原氏ノ中級数ノ複葉小生ニ関スル定理ノ証明 (Jap. Journ. of Math. X, 1933, 71-78) カ大變簡單ニナル。

$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_p z^p + \cdots$  ヲ  $|z| < R$  テ正見リ且ツ少クモ  $p+1$  葉トスルハ相異ル  $p+1$  个ノ異  $z_i$  テ同ニ値ヲトルカラ今凡テ  $z_i$  ヲ内部ニ含ム同心円  $|z| < R' (< R)$  ヲ  $C$  トスルハ前述ノ結果カラ

$$\int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2) \cdots (\zeta - z_{p+1})} = 0$$

$$\text{又ハ} \quad \int_C \frac{f(\zeta)}{(1 - \frac{z_1}{\zeta})(1 - \frac{z_2}{\zeta}) \cdots (1 - \frac{z_{p+1}}{\zeta})} \frac{d\zeta}{\zeta^{p+1}} = 0$$

$C: |z| = R'$  上ニテハ

$$\left(1 - \frac{z_i}{\zeta}\right)^{-1} = 1 + \frac{z_i}{\zeta} + \frac{z_i^2}{\zeta^2} + \cdots + \frac{z_i^n}{\zeta^n} + \cdots$$

從テ

$$\prod_{i=1}^{p+1} \left(1 - \frac{z_i}{\zeta}\right)^{-1} = 1 + \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2} + \cdots + \frac{A_n}{\zeta^n} + \cdots, \quad \text{ト展開ナル}$$

$A_n$  は  $z_i$  有理整式"係数"正"かつ  $|z_i|$  ( $i=1, 2, \dots, p+1$ )、

最大  $\rho$  トスレバ、 $\rho =$

$$\ll \left(1 - \frac{\rho}{\zeta}\right)^{-(p+1)} = 1 + \binom{p+1}{1} \frac{\rho}{\zeta} + \binom{p+1}{2} \frac{\rho^2}{\zeta^2} + \dots + \binom{p+n}{n} \frac{\rho^n}{\zeta^n} + \dots$$

即ち  $|A_n| \leq \binom{p+n}{n} \rho^n$

$$\int_C (a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots + a_p \zeta^p + a_{p+1} \zeta^{p+1} + \dots + a_{p+n} \zeta^{p+n} + \dots) \times \\ \left(1 + \frac{A_1}{\zeta} + \dots + \frac{A_n}{\zeta^n} + \dots\right) \frac{1}{\zeta^{p+1}} d\zeta = 0$$

より

$$a_p + a_{p+1} A_1 + a_{p+2} A_2 + \dots + a_{p+n} A_n + \dots = 0$$

$$|a_p| \leq \sum_1^\infty |a_{p+n}| |A_n| \quad \text{故に} \quad |a_p| \leq \sum_1^\infty \binom{p+n}{n} |a_{p+n}| \rho^n$$

従て市原氏、定理を得ル。

定理(市原氏)  $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p + \dots$

かつ  $|a_p| \geq \sum_1^\infty |a_{p+n}| \binom{p+n}{n} R^n$

すなわち  $f(z)$  は  $|z| < R$  で"正則"且"  $|z| < R$  で"高比  $p$ -葉"ナル。

証明ハ  $p+1$ 、回 同"値ヲトルトスレバ"  $R_1 < R$  = 与テ

$$|a_p| \leq \sum_1^\infty |a_{p+n}| \binom{p+n}{n} R_1^n$$

トナリ、之ハ矛盾ナル。(9.9.17 受取)