OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	函敷ノ単葉性ニ就テ
Author(s)	能代, 清
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 12, p. 1-6
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73872
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

35. 函數ノ單葉性ニ就テ。

能代清(北大)

解析函數ノ單(複)葉性ニ就テ氣ノ附イタコトガラヲ述ベテ見タイ。大シタ準備ヲシタワケデナイカラ不備ノ点ガアルカモ知レマセン。先ツ本紙上談話會第9号, 2ケデ高橋進一君ガ

$f(z)=z+\cdots\cdots$　ヲ $|z|<\rho$ $(\rho>1)$ デ正則トシタトキ $|z|<\rho$ デ

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|<M(\rho)$$

ヲ滿足スルナラバ $f(z)$ ガ $|z|<1$ デ單葉トナルコトガヨイル様ナ $M(\rho)$ ノ決定ニ対スルーツノ解答ヲ初等的ナ方法デ出シテ居リマスガ, 之ニ関シテ次ノ様ナ少シ一般的ナ方ヘ方ヲシテ見ヨウト思ヒマス。$f(z)=z+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<\rho$ $(\rho>1)$ デ正則トスル時, ココデ $f(z)$ ノ値ガ如何ナル領域 $D(\rho)$ ニ属スルトスレバ $f(z)$ ガ $|z|<1$ デ單葉トナルコトガヨイルカ。先ツ $\frac{f(z)}{z}\subset D$ ト假定スル。(但, Dハ少クトモ三ツノ界点ヲ有スルモノトスル)。$z=\rho t$ トオケバ

$$\phi(t)=\frac{f(\rho t)}{\rho}=t+\cdots\cdots$$

ハ $|t|<1$ デ正則且ツコレデ

$$\frac{\phi(t)}{t}=\frac{f(\rho t)}{\rho t}=\frac{f(z)}{z}\subset D$$

故ニ $\phi(t)$ ハ $|t|<R(D)$ デ單葉デアル様ナ $R(D)$ ガ存在スル。(例ヘバ正規族ノ理論ヲ用ヰテ) 隨テ $f(z)=\rho\phi\left(\frac{z}{\rho}\right)$ ハ $|z|<\rho R(D)$ デ單葉トナル。$\rho R(D)\geq 1$ ナル様ナ D ヲ逆ニ探ス。

一例トシテ　D ; 円 $|z|<M$ (勿論 $M>1$) ノ場合ハ Dirichlet ノ定理ヨリ

$\phi(t)$ ハ $|t|<M-\sqrt{M^2-1}$ デ単葉(且星型)デアルカラ

$f(z)$ ハ $|z|<\rho(M-\sqrt{M^2-1})$ デ単葉デアル。

$\rho(M-\sqrt{M^2-1})\geqq 1$ ヨリ $M\leqq\frac{1}{2}(\rho+\frac{1}{\rho})$

定理 1. $f(z)=z+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<\rho\ (\rho>1)$ デ正則且ツココデ

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|<\frac{1}{2}(\rho+\frac{1}{\rho}) \qquad (1)$$

ナラバ, $f(z)$ ハ $|z|<1$ デ単葉(實ハ星型)デアル。(1)ノ右辺ハヨリ大キク出来ナイ(之レハ Dieudonné ノ定理ガ精密ナコトヨリワカル)

同様ニ $D;\ 0<|z|<M$ (勿論 $M>1$) トシテ見レバ

$\phi(t)$ ハ $|t|<\log_e M-\sqrt{(\log_e M)^2-1}$ デ単葉(星型)デアルカラ

$f(z)$ ハ $|z|<\rho(\log_e M-\sqrt{(\log_e M)^2-1}$ デ単葉(星型)デアル。

$\rho(\log_e M-\sqrt{(\log_e M)^2-1})\geqq 1$ ヨリ $M\leqq e^{\frac{(\rho-1)^2}{2\rho}}$

定理 2. $f(z)=z+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<\rho\ (\rho>1)$ デ正則且ツコンデ

$$0<\left|\frac{f(z)}{z}\right|<e^{\frac{(\rho-1)^2}{2\rho}} \qquad (2)$$

トスレバ, $f(z)$ ハ $|z|<1$ デ単葉(實ハ星型)トナル。(2)ノ右辺モ正確ナモノデアル。(以上定理 1, 2 ト拙論北大紀要 II, 定理 3, 6 ニ比較シテ見テ下サイ)

$\frac{f(z)}{z}\subset D$ ノ代リニ $f'(z)\subset D$ トシテモ同様ナ議論ガデキル。依リテハ

定理 3. $f(z)=z+\cdots\cdots$ ガ $|z|<\rho\ (\rho>1)$ デ正則ナトキ

$$|f'(z)|<\rho$$

ナラバ $|z|<1$ デ単葉(実ハ星型)デアル。コノトキ ρ ハ最モヨイ値デアル。

(拙著, 學士院記事, III (1933), No.7, P 275-277)

次= $\phi(t)=t+\cdots\cdots$ ガ $|t|<1$ デ正則且ツ コニテ"

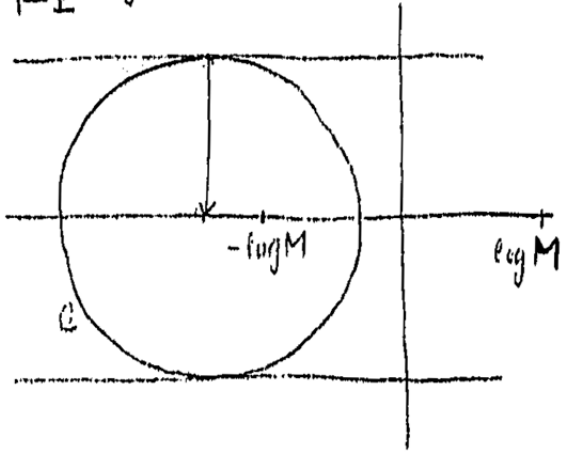
$$0<|\phi'(t)|<M \qquad (\text{但シ} M>1)$$

トスル。 $0<\left|\frac{\phi'(t)}{M}\right|<1$

$$w=\log\frac{\phi'(t)}{M}=\log\left|\frac{\phi'}{M}\right|+i\arg\frac{\phi'}{M}=\log\left|\frac{\phi'}{M}\right|+i\arg\phi' \quad (\text{但シ } \log 1=0)$$

トオケバ w ハ $|t|<1$ デ $\Re(w)<0$ トナル。 $|t|\leqq r$ =於テハ Schwarz ノ lemma ヨリ $\left|\frac{w+\log M}{w-\log M}\right|\leqq r$ デアルカラ $|t|\leqq r$ 内デ $w=\log\frac{\phi'}{M}$ ノトル値ハ ーツノ円 C: $\left|\frac{w+\log M}{w-\log M}\right|=r$ ノ内又ハ上=アル。C ノ半径ヲ求メルト $\frac{2r}{1-r^2}\log M$ デアル。 ヨッテ

$$|\arg\phi'(t)|\leqq\frac{2r}{1-r^2}\log M \quad \text{for } |t|\leqq r$$



$\frac{2r}{1-r^2}\log M=\frac{\pi}{2}$ トオケバ $r_0=-\frac{2}{\pi}\log M+\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\log M\right)^2+1}$

故= $|t|<r_0$ トラバ"

$|\arg\phi'|<\frac{\pi}{2}$ 即チ $\Re(\phi')>0$ 。

サテ $\phi(t)$ ガ凸状領域 D デ正則且 $\Re(\phi')>0$ トラバ D デ単葉デアルトユフ定理（証明ハ近ク=出ル北大紀要ノ拙論，柱谷先生ノ非常=奇麗ナ幾何学的証明ハ尾山崎君ガ大塚数学会誌3巻 p.14 デ紹介シテオル）ヲ用ヒルト $\phi(t)$ ハ $|t|<r_0$ デ単葉トナル。

注意 $0<|\phi(t)|<M$ ノ代リ= $\infty>|\phi'(t)|>m$ （但シ $m<1$）トスレバ $0<\left|\frac{1}{\phi'}\right|<\frac{1}{m}=M$ ヨリ $|t|<r_0$ デ $\Re\left(\frac{1}{\phi'}\right)>0$ 即チ $\Re(\phi')>0$. ヨッテ $|t|<r_0=-\frac{2}{\pi}\log\frac{1}{m}+\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\log\frac{1}{m}\right)^2+1}$ デ単葉デアル。

従テ定理 1, 2 ノ証明ト同様=シテ

定理 4. $f(z)=z+\cdots$ が $|z|<\rho$ $(\rho>1)$ で正則かつ

$$0<|f(z)|<e^{\frac{\pi}{4}(\rho-\frac{1}{\rho})} \qquad |z|<\rho$$

ならば $f(z)$ は $|z|<1$ で単葉である。

定理 4' $f(z)=z+\cdots$ が $|z|<\rho$ $(\rho>1)$ で正則かつ

$$\infty>|f'(z)|>e^{-\frac{\pi}{4}(\rho-\frac{1}{\rho})} \qquad |z|<\rho$$

ならば $f(z)$ は $|z|<1$ で単葉である。

吉田耕作君が $f(z)=z+\cdots$ が $|z|<\rho$ $(\rho>1)$ で正則かつ $|z|<\rho$ で $|f'(z)|>m(\rho)$ ならば $f(z)$ が $|z|<1$ で単葉となるが如き $m(\rho)$ の存在を注意した由であるが、$m(\rho)$ として $e^{-\frac{\pi}{4}(\rho-\frac{1}{\rho})}$ をとれることが出来る。定理 4 及び 4' の右辺の制限が正確なものかどうかはまだ今の処未だ分らない。

次の話をかえて $f(z)$ の複葉性に関しての注意をしておく。

$|z|<\rho$ なる領域 D で正則とし、相異なる $p+1$ 個の点

$$z_1, z_2, \cdots, z_{p+1}$$

で同じ値をとるとする。これらの点 z_i $(i=1,2,\cdots,p+1)$ をすべて内部に含む任意の単純な閉(正則)曲線を C とすれば

$$\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\cdots(\zeta-z_{p+1})}=0$$

証明は簡単である。先ず Cauchy の定理から $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$

1° $p=1$ のとき

$$f(z_1)-f(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_1}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_2}\right)d\zeta=\frac{z_1-z_2}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}d\zeta=0$$

2° $p=m$ のとき真として $p=m+1$ を証明する。

$z_1, z_2, \cdots\cdots, z_{m-1}, z_m$ (mケ) i)

$z_1, z_2, \cdots\cdots, z_{m-1}, z_{m+1}$ (mケ) ii)

ヨッテ假定ヨリ

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\cdots(\zeta-z_{m-1})(\zeta-z_m)}\,d\zeta = 0 \qquad i)'$$

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\cdots(\zeta-z_{m-1})(\zeta-z_{m+1})}\,d\zeta = 0 \qquad ii)'$$

辺々相減ジテ

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\cdots(\zeta-z_m)(\zeta-z_{m+1})}\,d\zeta = 0$$

注意、上ノ事実ハ $z_1, z_2, \cdots, z_{p+1}$ ガ一部或ハ全部ガ一致シテモ成立スルコトハ明カデアル。コノ結果ヲ用ヒルト市原氏ノ中級数ノ複葉性ニ関スル定理ノ証明（Jap. Journ. of Math. X, 1933, 71-78）ガ大変簡単ニナル。

$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_p z^p + \cdots$ ヲ $|z|<R$ デ正則且ツ少クモ $p+1$ 葉トスレバ相異ル $p+1$ ケノ点 z_i デ同ジ値ヲトルカラ今凡テノ z_i ヲ内部ニ含ム同心円 $|z|<R'(<R)$ ヲ C トスレバ前述ノ結果カラ

$$\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\cdots(\zeta-z_{p+1})} = 0$$

又ハ

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\left(1-\frac{z_1}{\zeta}\right)\left(1-\frac{z_2}{\zeta}\right)\cdots\left(1-\frac{z_{p+1}}{\zeta}\right)}\,\frac{d\zeta}{\zeta^{p+1}} = 0$$

$C: |z|=R'$ 上デハ

$$\left(1-\frac{z_i}{\zeta}\right)^{-1} = 1 + \frac{z_i}{\zeta} + \frac{z_i^2}{\zeta^2} + \cdots + \frac{z_i^n}{\zeta^n} + \cdots\cdots$$

従テ

$$\prod_{i=1}^{i=p+1}\left(1-\frac{z_i}{\zeta}\right)^{-1} = 1 + \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2} + \cdots + \frac{A_n}{\zeta^n} + \cdots\cdots,$$ ト展開サレ

A_n ハ z_i ノ有理整式デ係数ハ正ダカラ $|z_i|$ $(i=1,2,\cdots,p+1)$ ノ最大ヲPトスレバ明ニ

$$\ll (1-\frac{\rho}{\zeta})^{-(p+1)} = 1+\binom{p+1}{1}\frac{\rho}{\zeta}+\binom{p+2}{2}\frac{\rho^2}{\zeta^2}+\cdots+\binom{p+n}{n}\frac{\rho^n}{\zeta^n}+\cdots$$

即チ $$|A_n| \leqq \binom{p+n}{n}\rho^n$$

$$\int_C (a_0+a_1\zeta+a_2\zeta+\cdots+a_p\zeta^p+a_{p+1}\zeta^{p+1}+\cdots+a_{p+n}\zeta^{p+n}+\cdots)\times \left(1+\frac{A_1}{\zeta}+\cdots+\frac{A_n}{\zeta^n}+\cdots\right)\frac{1}{\zeta^{p+1}}d\zeta = 0$$

ヨリ

$$a_p+a_{p+1}A_1+a_{p+2}A_2+\cdots+a_{p+n}A_n+\cdots = 0$$

$$|a_p| \leqq \sum_1^\infty |a_{p+n}||A_n| \qquad 故ニ \quad |a_p| \leqq \sum_1^\infty \binom{p+n}{n}|a_{p+n}|\rho^n$$

従テ市原氏ノ定理ヲ得ル.

定理(市原氏)　$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_pz^p+\cdots$

ガ $$|a_p| \geqq \sum_1^\infty |a_{p+n}|\binom{p+n}{n}R^n$$

ナラバ $f(z)$ ハ $|z|<R$ デ正則且ツ $|z|<R$ デ高々 p-葉デアル。

証明ハ $p+1$ 回同ジ値ヲトルトスレバ $R_1<R$ ニ対シテ

$$|a_p| \leqq \sum_1^\infty |a_{p+n}|\binom{p+n}{n}R_1^n$$

トナリ之レハ矛盾デアル。　(9.9.17 受取)