OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	正則函數ノ單葉性 及ビ 多葉性ニツイテ
Author(s)	鍋谷, 堅次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 12, p. 7-14
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73873
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

36. 正則函数ノ單葉性及ビ多葉性ニツイテ

金岡谷堅次郎(東北大)

本誌第9号ニ載セラレタ高橋進一氏ノ「函数ノ單葉性ノ一判定條件」ヲ興味深ク讀ミマシタ。其最初ノ定理ハ実質ニ於テ Landau 及ビ J. Dieudonné ノ得タ定理(Ann. l'Ecole Norm. Sup. III Sér., 大.48, 1931 p.349)ニ含マレル様ニ思ヒマス。証明法ハ Cauchy ノ積分公式ヲ用ヒルモノデ非常ニ面白イト思ヒマス。私ハ此方法ヲ用ヒテ次ノ様ナ結果ヲ得マシタ。

定理1. $f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<1$ デ正則デ且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f(z)-z|\,d\varphi \leqq M<1 \quad , \quad 0<r<1$$

ナル條件ヲ滿足スル函数トスレバ $f(z)$ ハ $|z|<1-\sqrt{M}$ ニテ單葉デアル

証明. $f(z)=z+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\frac{f(\zeta)-\zeta}{\zeta-z}d\zeta$, $|z|<\rho<1$ デスカラ.

$|z_1|<\rho$, $|z_2|<\rho$ トスルト

$$\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_1-z_2}=1+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\frac{f(\zeta)-\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}d\zeta$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\frac{f(\zeta)-\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}d\zeta\right| \leqq \frac{\rho}{2\pi}\int_{|\zeta|=\rho}\left|\frac{f(\zeta)-\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}\right|d\varphi,$$

$$\leqq \frac{M\rho}{(\rho-|z_1|)(\rho-|z_2|)}$$

ノデスカラ $\frac{M\rho}{(\rho-|z|)^2}<1$ 即チ $|z|<\rho-\sqrt{M\rho}$ ナル円内ニ z_1, z_2 ガアルトスレバ

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\frac{f(\zeta)-\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}d\zeta\right|<1.$$

トリ先ノ等式ヨリ $\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}\neq 0$. 故ニ $f(z)$ ハ $|z|<\rho-\sqrt{M\rho}$ ニ於テ單葉トリ, $\rho\to 1$ トスレバ定理1ガ得ラレマス。

定理1ニ於ケル條件ヲ, $|f(z)-z|\leqq M$, $|z|<1$ デ置キカヘ Dieudonné ノ方法ニ依ツテ $f(z)$ ノ單葉半径ヲ正確ニ出スコトハ興味アル問題デスガ簡單ニ行カナイ様デスカラユックリ考ヘテミヨウト思ヒマス。

定理2. $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ ガ $|z|<1$ デ正則デ(今後單ニ $f(z)$ トイヘバ常ニ以上ノ性質ヲ備ヘテヰルモノトシマス)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|u(z)-r\cos\varphi|\,d\varphi\leqq M<\frac{1}{2},\quad 0<r<1$$

$$u(z)=\mathrm{R}\{f(z)\}.$$

ナル條件ヲ滿足スルモノトスレバ $f(z)$ ハ $|z|<1-\sqrt{2M}$ ニ於テ單葉デアル

此定理ヲ證明スルニハ Poisson ノ公式ニヨリ

$$f(z)=z+\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=r}(u(\zeta)-\rho\cos\vartheta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\vartheta$$

デスカラ

$$\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}=1+\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=r}(u(\zeta)-\rho\cos\vartheta)\frac{2\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}d\vartheta,$$

ノ関係ヲ用ヒテ定理1ノ證明ト同様ニヤレバヨイ。

定理3. $f(z)$ ガ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\cdots|\,d\varphi\leqq M<|a_n|,\quad 0<r<1$$

ナル條件ヲ滿足スルトキハ $f(z)$ ハ $|z|<1-\sqrt[n+1]{\frac{M}{|a_n|}}$ ニテ高々 n 葉デアル

此定理ヲ証明スルニハ

$$\Delta_0(z_1)=f(z_1),\quad \Delta_1(z_2,z_1)=\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1},\quad \cdots\cdots$$

$$\Delta_k(z_{k+1},z_k,\cdots,z_1)=\frac{\Delta_{k-1}(z_{k+1},z_{k-1},z_{k-2},\cdots,z_1)-\Delta_{k-1}(z_k,\cdots,z_1)}{z_{k+1}-z_k}$$

$$(k=1,2,\cdots,n)$$

トスルト

$$\Delta_n(z_{n+1},z_n,\cdots,z_1)=a_n+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)-(a_0+a_1\zeta+\cdots+a_n\zeta^n)}{(\zeta-z_{n+1})(\zeta-z_n)\cdots(\zeta-z_1)}d\zeta$$

デスカラ、後ハ定理1,2ノ証明ト同様ニヤレバヨイ。

定理4. $f(z)$ ガ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}\left|R\{a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\cdots\}\right|d\varphi\leqq M<\frac{|a_n|}{2},\quad 0<r<1$$

ナル條件ヲ滿足スルトキハ $|z|<1-\sqrt[n+1]{\frac{2M}{|a_n|}}$ ニ於テ高々 n 葉デアル。

証明ハ定理1,2,及ビ3ノソレカラ推シテ明カデス。

E. Egerváry, Über gewisse Extremumprobleme der Funktionentheorie, Math. Ann., 99 (1928), 542-561, 560頁ニミマスト次ノ様ナ定理ガアリマス。

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots$$

ヲ $|z|\leq1$ デ正則トシ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(e^{i\theta})|d\theta\leqq1$ ナルトキハ

$$m_p(r)=|a_0|+|a_1|r+\cdots+|a_n|r^n+\cdots\leqq\frac{1}{1-r^2},\quad 0<r<1$$

コノ結果ヲ用ヒルト次ノニツノ定理ガ容易ニ得ラレマス。

定理5. $f(z)$ ガ $\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f(z)|^\nu d\varphi\leqq M<2,\quad 0<r<1$

ナル條件ヲ滿足スルトキハ $f(z)$ ハ $|z|<\sqrt{1-\frac{M}{2}}$ ナル圓ヲ原点ニ関スル星型領域ニ等角ニ描写スル.

定理6. 上定理ニ於ケル條件ヲ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f'(z)-1|\,d\varphi \leqq M<1,\quad 0<r<1$$

デ"ヲキカヘルト $f(z)$ ハ $|z|<\sqrt{1-M}$ ヲ原点ニ関スル星型領域ニ、等角ニ非等ニマス。

定理5,6ハ上述ノ Egerváry ノ定理ヲ用ヒテ次ノ定理カラ導キ出スノデス.

$f(z)$ ハ $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}<1,\quad 0<r<1$

ヲ成立セシメル様ナ r ニ対シテ $|z|$ ヲナル圓ヲ原点ニ関スル星型領域ニ等角ニ描写スル.

此定理ハ能代清氏ノ On the star-shaped mapping by an analytic function, Proc. Imp. Acad Tol. 8, no. 7, 1932 ニ発表サレテヰマスガ" J. W. Alexander ガ" 既ニ 1915 ニ Ann. of Math ニ出テヰマス。定理5ノ條件ヲ $|f(z)|\leqq M$, $|z|<1$ デ"置キカヘテ正確ナ星型半径ヲ出スコトハ上ノ能代氏ノ論文ニ於テヤサレテヰマス。定理6ノ條件ヲ $|f(z)-1|\leqq M$, $|z|<1$ デ"ヲキカヘテ同様ノ結果ヲ求メル問題ハ能代氏ノ方法ヲ用ヒテ容易ニ同様ニ出来マス。結果ヲ書クト

定理7. $f(z)$ ガ" $|f(z)-1|\leqq M$, $|z|<1$ ヲ滿足スルトキハ $f(z)$ ハ $|z|<\frac{1}{\sqrt{M^2+1}}$ ヲ原点ニ関スル星型領域ニ描写スル。コノ結果ハ最良ノモノデ"アル。

序ニ述ベマスト私ハ能代氏ノ方法ニヨリ $f(z)$ ニ各々

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f(z)|^2 d\varphi \leqq M^2,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f'(z)|^2 d\varphi \leqq M^2,\quad 0<r<1$$

ナル條件ヲ与ヘテ夫々星型半径及ビ凸型半径ヲ正確ニ出シマシタガ"其原稿ハ解答原先生ノ御手許ニ呈出シテアリマスカラ其内ニ発表サレルコトト思ヒマス．尚上ノ同上ノ條件ノ下ニ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f''(z)|^2 d\varphi \leqq M^2,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f''(z)|^2 d\varphi \leqq M^2,\quad 0<r<1$$

ナル條件ノ下デモ同様ノ方法デ星型半径及ビ凸型半径ガ正確ニ求マルコトヲ知リマシタ。

定理 8．$f(z)$ ガ $f'(z)\neq 0$, $|z|<1$, 及ビ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f'(z)|\,d\varphi \leqq M,\quad 0<r<1$$

ナル條件ヲ満足スルトキハ $|z|<\frac{1}{M+1}$ ノ原点ニ関スル星型領域ヲ，$|z|<1-\sqrt{\frac{M}{M+1}}$ ノ凸型領域ニ描写スル．

証明．$f'(z)$ ガ $|z|<1$ デ 0 トナラナイカラ

$$\sqrt{f'(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n,\quad c_0=1$$

ハ $|z|<1$ デ一價正則リデス．故ニ $r<1$ ナルトキ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}^{2\pi}|f'(z)|\,d\varphi=|c_0|^2+|c_1|^2r^2+\cdots+|c_n|^2r^{2n}+\cdots\leqq M,$$

又 $f(z)=\int_0^z\left(\sqrt{f'(z)}\right)^2 dz=z+\frac{1}{2}(c_0c_1+c_1c_0)z^2+\cdots\cdots$

$$+\frac{1}{n+1}(c_0c_n+c_1c_{n-1}+\cdots+c_nc_0)z^{n+1}+\cdots\cdots,$$

然ルニ $|c_0c_n+\cdots+c_nc_0|\leqq(|c_0c_n|+|c_1c_{n-1}|+\cdots+|c_nc_0|)$

$$\leqq |C_0|^2+|C_1|^2+\cdots+|C_n|^2 \leqq M$$

デアルカラ $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\gamma^{n-1} \leqq \sum_{n=2}^{\infty} n\frac{M}{n}\gamma^{n-1} = \frac{M\gamma}{1-\gamma} < 1,\ \gamma<\gamma_0$

$$\frac{M\gamma_0}{1-\gamma_0}=1 \quad 或ハ\ \gamma_0=\frac{1}{M+1}$$

即チ $|z|<\frac{1}{M+1}$ ガ"原点ニ関スル星型領域ニ描写サレマス。又

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n|\gamma^{n-1}<1,\ 0<\gamma<1$$

ヲ満足スルγニ対シテ $|z|\leqq\gamma$ ガ"凸領域ニ描写サレマスカラ(前掲ノ能代氏ノ論文参照)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n|\gamma^{n-1} \leqq \sum_{n=2}^{\infty} nM\gamma^{n-1} = \frac{M}{(1-\gamma)^2}-M<1,\ \gamma<\gamma_0.$$

$$\frac{M}{(1-\gamma_0)^2}-M=1 \quad 或ハ\ \gamma_0=1-\sqrt{\frac{M}{M+1}}.$$

上ノ定理ニ於テ $\sqrt{f(z)}$ ガ一価正則ナルコトヲ利用スルコトハ次ノ論文カラ引用シタモノデス。

S. Warschawski, Über Einige Konvergenzsätze aus der Theorie der Konformen Abbildung, Göttinger Nach., 1930, S. 344-369, S. 344.

上ノ定理ト同様ニシテ次ノ定理ガ"成立シマス。

定理9. $f(z)$ ガ"単位円内デ" $\frac{f(z)}{z}\neq 0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=\gamma}\left|\frac{f(z)}{z}\right|d\varphi \leqq M,\ 0<\gamma<1$$

ナル条件ヲ満足スルトキハ $|z|<1-\sqrt{\frac{M}{M+1}}$ ノ原点ニ関スル星型領域ニ描写シ, $\gamma^3-3\gamma^2+(M^2+3)\gamma-1=0$ ノ唯一ノ正根ヲγ。トスルト $|z|<\gamma_0$ ナル円ヲ凸領域ニ描写スル。

定理10. $f(z)$ が $|z|<1$ で $\frac{f(z)}{z}\neq 0$ 及び

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}\log^{+}\left|\frac{f(z)}{z}\right|d\varphi\leqq M,\quad 0<r<1$$

を満足するときは $|z|<2M+1-\sqrt{(2M+1)^2-1}$ なる円を原点に関する星型領域に写す。

証明. $|z|<1$ で $\frac{f(z)}{z}\neq 0$ であるから $\log\frac{f(z)}{z}$ は調和函数で Poisson の公式により

$$\log\frac{f(z)}{z}=\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=\rho}\log\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\varphi,\quad |z|<\rho.$$

よって

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}-1=\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=\rho}\log\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|\frac{2\zeta z}{(\zeta-z)^2}d\varphi$$

故に $R\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0$ なる為には右辺の絶対値が1より小さければよい。

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=\rho}\log\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|\frac{2\zeta z}{(\zeta-z)^2}d\varphi\right|\leqq\frac{2\rho|z|}{(\rho-|z|)^2}\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=\rho}\left|\log\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|\right|d\varphi$$

$$=\frac{2\rho|z|}{(\rho-|z|)^2}\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|=\rho}\log^{+}\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|d\varphi\leqq\frac{4M\rho|z|}{(\rho-|z|)^2}.$$

$$\frac{4M\rho r}{(\rho-r)^2}=1 \text{ 或は } r^2-2\rho(M+1)r+\rho^2=0$$

を解いて $r_0=2M+1-\sqrt{(2M+1)^2-1}$ とすれば $|z|<r_0$ に対して

$$\frac{4M\rho|z|}{(\rho-|z|)^2}<1$$

故に定理10が証明された。

定理10と同様にして次の定理が証明される。

定理11. $f(z)$ が $|z|<1$ で $|f(z)|\neq 0$ 及び

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}\log^{+}|f(z)|\,d\varphi \leqq M,\quad 0<r<1$$

で満足するとき $|z|<2M+1-\sqrt{(2M+1)^2-1}$ で凸領域で等角で単葉である。（9.9.19 受取）