



Title	Das Dehnsche Lemma 就テ
Author(s)	小松, 醇郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 15, p. 1-7
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73878
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

全國紙上數學談話會第15号. 十月

41. Das Dehnsche Lemma = 就テ

小松 醇 郎 (阪大)

M Dehn は Math. Ann. 69 Bd. テ" 以下ニ述ベル所謂 Dehnsches Lemma ナル定理ヲ證明シタ。所カ後ニソノ証明ノ缺陷ヲ指摘シタノハ H. Kneser デアル。(Jahresbericht der Dent. Math. Verein. 38 Bd.). 本年 I. Johanssen カ" 此ノ Vermutung ヲ進メテ "Dehn-Diagramm" ナル概念ヲ導入シテ居ル。(Math. Ann. 110 Bd.) dass Dehn-Diagramm ノ性質ヲ求メテ此ノ Dehnsches Lemma ノ證明ヲ完了シタトカラ 此下此ノ證明ニ必要ナ Dehn, Johanssen ノ結果ヲ紹介セ後ソレヲ利用スル事ノ証明ヲ述べテ見マス。

Das Dehnsche Lemma:

Jede geschlossene Kurve K , die in einer homogenen topologischen Mannigfaltigkeit M von wenigstens drei Dimensionen eine singuläre d.h. sich selbst durchdringende) Elementarfläche berandet, auch eine singularitätenfreie Elementarfläche in M berandet, wenn bloss die Kurve K selbst von den Singularitäten nicht getroffen wird.

茲テ" homogen トハ"ノ各点ノ Umgebung カ"常ニ M ノ次元ノ球内部ト homöomorph. デアル事ヲ表シ, Elementarfläche (singularitätenfreie) トハ"ツノニ次元 Simplex ト homöomorph ナモノ, singulär トハ"ノ eindeutige stetige Bild (eindeutig デハナイ) ヲ表ス。

Dehn ハ先ヅ M カ 3 次元ヨリ高次元ナラバ trivial, ソコテ 3 次元ノミヲ考ヘル

1. $AB (A \neq B)$ が 幾重 = モ重 ナッテ Strecke トスル、即 Singularitätenfreie Elementarfläche 上、多ク、Strecke が $AB = \text{stetig abbilden}$ シテ居ル、 M homogen カラ AB の Umgebung の Elementarraumstück、 $\forall$ コデ $AB = \text{シテ}$ 交ルベテ、Blätter ハ切スルモ、テアールト假定スル、此、各 Blätter、代リ = 充分イ Blätter ヲ代用シテ AB ヲ通ラス、且新レイ Singularitäten ガ生ジナイ様ヲ出ル、

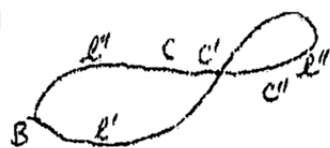
A が 幾重 = モ重 ナレル莫トシ且 A カラ出ル singuläre Strecke ハナイトスルモ多ク、Blätter ガ切スルダケダカラ前ト同種ナ Prozess 7" Singularitätenfrei ナル

2. n 重 ($n > 2$) = 数ヘラレル singuläre Strecke ハ各 Blätter、近イモ、ヲ代スル事 = コソテ 2 重、singuläre Strecke ノトナル、

n 重 ($n > 3$) = 数ヘラレル singulärer Punkt モ同様 = benachbaste Blätter、代用 = コリ 3 重、モ、= 歸着スル、1 = 依リ結局此、Singularitäten ハ交ル合、ノイデナル、

$\forall$ コデ 先ツ" singuläre Linie、ウチ ヴレガ ungeschloosen、場合ハ次、如ク Singularitätenfrei = ナル、Singularitätenfreie Elementarfläche E^2 、 $\forall$ eindeutige stetige Bild ヲ E^{12} デ表ス、 E^{12} 上 AB ヲ Endpunkt トスル singuläre Linie $l = \text{對シ}$ E^2 上 l', l'' ガ對應スル、 E^2 上 7" singuläre Linie、Urbild ガ ungeschloosen ト言フ事ハカリ得ナイ (E^2 、Rand ハ Singularitätenfrei) カラヤ、

図

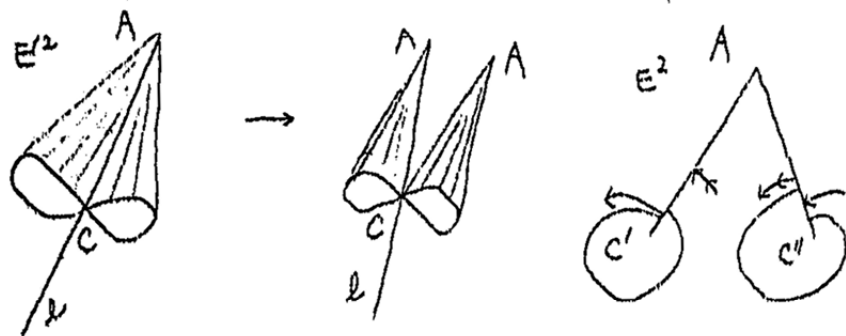


A, B : Verzweigungspunkt

l', l'' 、交ル C ハ l' 上、莫ト考ヘルト C' 之ガ E^{12} 7"

ト重ナル臭 C'' ハ一般 = E^2 デハ C' ト一致シナ 1.

AC' ト AC'' トガ E^2 デ自切線. ヲレ故 E^2 上, AC 線 = 沿ヒ、Umschaltung
行フ. 即 AC = 沿ヒ結合方法ヲ變ヘ新レイ Blätter ハ AC デ互ヒ = 切スル様ニヌ

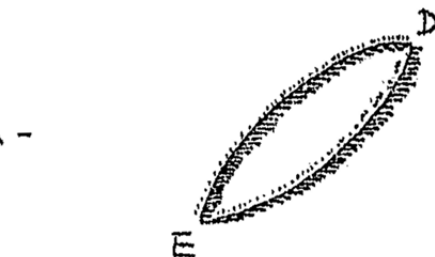


エテ前 = 一重, 臭 A ガ =
=, =重, 臭 C ガ一重 = +
是 = 依ッテ頂臭, 数ハ不
從テおける指標 = 不變
且 zusammenhängend ナ

ヲ矢張り一様連結デアル.

C カラ又 ungeschlossene Doppellinie が出ル. 此処デ同様ナ手續キヲ行ヒ結
 E^2 上デ l', l'' ト交ハラナイ様ニナル, $DE = \{(DE)', (DE)''\}$ テ $(DE)', (DE)''$ 交
ラナイトスルト圖ノ如ク結合シ變ヘル.

此ノ Umschaltung テ結局 einfach zusammen-
hängend テ singularitätenfrei = 出來ル.

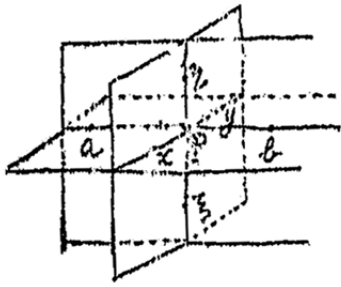
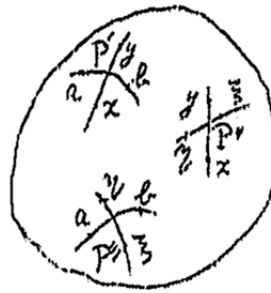


次 = Singuläre Linie ガ geschlossen テアルガ自ラ

交ハラナイキ $dreifacher$ Punkt, ナイトキハ前, Umschaltung = singular-
itätenfrei = ナン得ル.

$dreifacher$ Punkt, アル geschlossene Doppellinie, 場合, Dehn, 証明ハ不
備デアル. ヲコデ Johansson, 試ミ, ウチ必要ナ部分ダケヲ紹介スル.

$dreifacher$ Punkt P , 近傍デ doppellinie, $n = 6$ 個, „Nachbarpunkte
 a, b, x, y, z, η ヲトル. 是ヲ E^2 デハ圖ノ如クナツテ居ル.

 E^2 E^2 

dreifacher Punkt

Nachbarpunkte トノ

関係ヲ E^2 上テ" 表シタ

Diagramm カ次ノ條件

ヲ充ストキ Dehn -

Diagramm ト云フ。Die Schnittpunkte des Diagramms müssen derart in Gruppen von je drei zerfallen, dass ihre zwölf Nachbarpunkte miteinander folgenden Schema zu je zwei gleich bezeichnet sind:

A Schnittpunkt von Strecken ab und cd

B " " " cd " cf

C " " " cf " ab

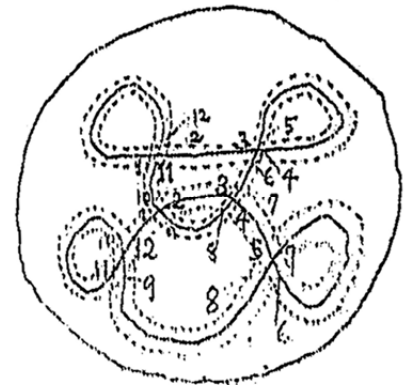
Dreifacher Punkt カ singularitätenbehaftete Elementarfläche τ realisieren スルトキノ必要條件デアル。扱テ E^2 上 Nachbarkurven 7 3 | 9 Spuri-kurven トノ交点 Nachbarpunkte。是ヲ次ノ如
然 = Klasse = 令ケル、

1). Nachbarpunkte, die auf derselben Nachbarkurve liegen, werden zusammengefasst.

2). Gleichbezeichnete Nachbarpunkte werden zusammengefasst

3). Wenn a mit b und b mit c zusammengefasst sind, dann wird auch a mit c zusammengefasst:

上ノ圖デハ = 3 / Klasse



前、図デハニツノ Klasse = 分ケラレ $[1, 4, 5, 8, 9, 12], [2, 3, 6, 7, 10, 11]$ トナル。

Klasseneinteilung ヲ便ニ Dehn-Diagramm - Realisierbarkeit - Kriterium ガ求
如ク言ヘル。 Für die Realisierbarkeit eines Dehn-Diagramms ist notwendig
und hinreichend, dass entgegengesetzte Nachbarpunkte niemals zur
selben Klasse gehören. E^2 上ノ閉曲線ハ homotop O デアルカラ
に沿ヒ E^1 Indikatrix 不変ト言フ事カ証明出来ル。 証明、

以上 Johansson ノ結果ハ E^2 上デ Dehn-Diagramm ノ性質ヲ求メテ事ニナル
今 $E^2 = \text{realisieren}$ サルヲ状態ヲ調べテ見ル。 Nachbarpunkte ノ Johansson
Klasseneinteilung ハ必ずしもニツノ Klasse ノミニ分ケラレルトハ限ラナク、然
是ヲ E^2 上デ考ヘルト常ニニツノ Klasse = ナル 何トナトバ E^2 ハ homotop
O デアルカラ常ニ Orientierbar、然レソ、中ノ閉曲線ニ沿フ空間部分ハ nicht-
orientierbar デアリ得ル。今 E^2 ヲ Orientierte Flächenkomplex ニスル。ソ
各葉デソノ Orientierung = 一定関係ノ Vektor ヲ立テル。ソレ故 E^2 ノ一閉曲線ニ
沿ヒ元ニ戻レバ Indikatrix Konfieren シテモ E^2 ノ曲面部分ニ沿ヒ元ニ戻レバ
即チ E^2 上ノ曲線ニ沿ヒ元ニ戻ル事ニ相当スル) 必ズ Indikatrix erhalten
ナル。此ノ Vektor ノ方向ト、ソノ逆ノ方向ト、ニツニ分ケ

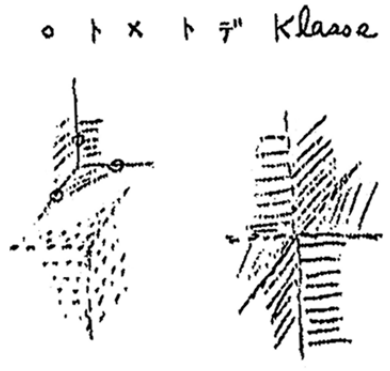
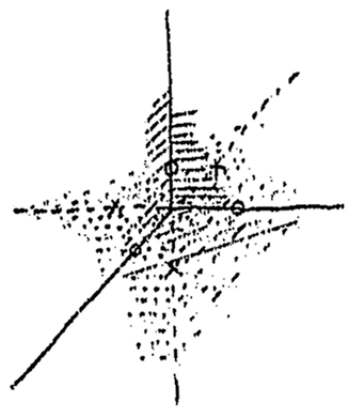
レバ Rベテノ Nachbarpunkte ハニツノ Klasse = 分ケラレ



シ 今各 dreifacher Punkt デニツノ Nachbarpunkte ヲ

Klasseneinteilung シテ置テ其如ク改メ如キ規則ニ従ッテ Umschaltung ヲ行

dreifacher Punkt ノ近傍ハハツノ象限ニ分ケル。ソノうちニ個ハソノ三本
輔上ノ Nachbarpunkte ハ同じ Klasse ノモデアル。ソノニツノ Blätter ヲ
ツニツトフ。残りノ各 Blätter ヲ夫ノ Doppelinie ニ沿ヒ紐ヒ合セル。



○ ト × ト デ" Klasse ヲ 示 ス、 Umschaltung ハ
見 = ヲ" dreifacher
Punkt ハ 三重 = 数 ハ ラ ヲ ヲ。
Doppellinie ハ = 重 = 数
ハ ラ ヲ ヲ。

一ツ / Dreifacher Punkt

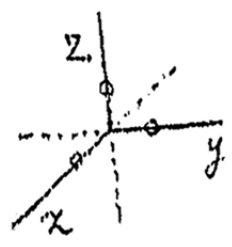
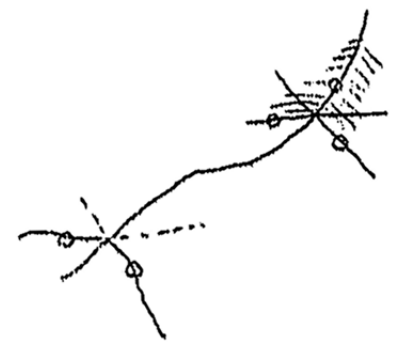
ガ'ラ 吹、 dreifacher Punkt = 到 ル ト キ Klasse-einteilung der Nachbarnpunkte
ハ 圈、 如 ク ナ ツ テ 居 ル 管 ダ カ ラ 此 処、 Umschaltung

規則 ハ 常 = R テ = 適用 ス ル 事 ガ 出 来 ヲ。

尚 此、 降 此、 Umschaltung デ" 出 来 ヲ

singularitätenfreie Fläche ハ

Orientierbar デ" アル 事 ヲ 証明 ス、



図、 如 キ Klasse-einteilung デ" ア ツ タ ト ス レバ E^2 /

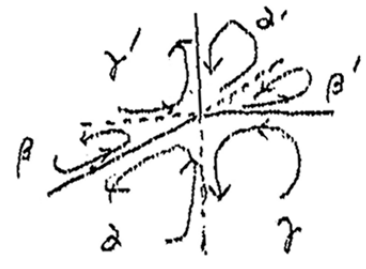
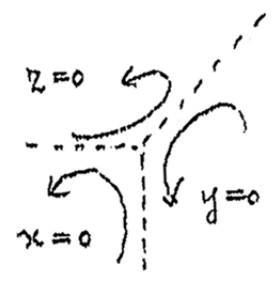
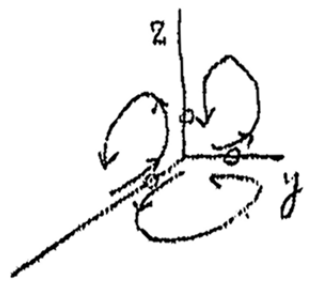
Orientierung, 従 ツ テ E^2 , Orientierung ハ

$z=0$ デ" ハ x / 正 / 方向 カ ラ y / 正 / 方向 ハ、 同 轉、

$y=0$ " z - - - - - x - - - - - "

$x=0$ " y - - - - - z - - - - - "

其 処 デ" 此、 Orientierung ヲ 図 示 シ 結合 ス、 Blätter / ソ レ ヲ 比較 ス、



α, α' Blatt ハ

$y=0$ 平面、

β, β' Blatt ハ

$z=0$ 平面、

γ, γ' ハ $x=0$ 平面、

故テ此ノ *singularitätenfreie Fläche* が *zusammenhängend* ナリト
 ルナラバーツノ閉曲面が切スル少クモ一本ノ *Doppellinie* ハ (現在ヲハセカスル
 ニ至ヒ他ノ曲面が接スル、一ツノ閉曲面ニ對シテ唯一ツノ *Doppelstrecke*. (三)
 莫カラ次ノ三重莫マデノ間ノ) ヲ散リ *Umschaltung* ヲ行フ、尚未ダ凡テが *zusammenhängend*
 ニナラナイナラ離レテ居ル一ツノ曲面ヲトリソノ一本ノ *Doppel-*
strecke ニツギ *Umschaltung* ヲ行フ、エヲ續ケテ結局皆 *zusammenhängend*
 ナル 此ノ場合ハ *Orientierbare Fläche* ノ結合デアルカラ矢張り *Orien-*
tierbar ノ曲面デアル、

故テ此ノ曲面ニテ *Triangulation* ヲ考ヘおゝれる指不標ヲ計算スルト
 元ノ E^2 ノ *Triangulation* ニテ *dreifacher Punkt* ヲ3倍、*Doppellinie*
 ノ2倍ニ數定レタモノニ等シ、所ガ是ハ即チ E^2 ノ *Eulersche Charakteristik*
 デアツテ $\chi(E^2) = 1$.

出来ヨツク曲面ノベツク數 p^0, p^1, p^2 トスレバ *Rand* ガナルカラ
 $p^2 = 0$, *zusammenhängend* ナルカラ $p^0 = 1$

$$\therefore 1 = p^0 - p^1 + p^2 = 1 - p^1.$$

即チ此ノ曲面ハ *Orientierbar* ナリ *einfach zusammenhängend* ナル
 此ノ *Dehnsches Lemma* ヲ使ハバ *H. Kneser* ノ所謂 *überraschender-*
esatz ガ証明出來ル。 (9 10, 12)