



Title	平均値定理ノ拡張ニ就テ
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 15, p. 8-11
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73879
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

中野秀三郎 (一高)

本が「東北数学雑誌」(1934 p.200) =

$$\int_{x_0}^x \int_{x_1}^x \cdots \int_{x_{n-1}}^x f^{(n)}(x) dx^n = f^{(n)}(\xi) \int_{x_0}^x \int_{x_1}^x \cdots \int_{x_{n-1}}^x dx^n$$

ナルガ「女ロキ」ガ存在スルコトヲ証明サンデ「用ヒマシタ所、岡村博氏ガ」
 「必ス」ニ成立セス。例ヘバ $n=2$, $f''(x) = 2x^2 + 2x + 1$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$,
 $x_2 = 1$ '女ロキ' マリト御注意下サイマシタ。此トハ全ク本ガ「氣付カ」
 「カツタ所」ニ「真」= 赤面ノ至リデス。此トハ「欠」ノ「女ロ」ニ「正」ニ「タラ」
 「ト」思ヒマス。一所「御」托「言」ヲ「御」察「見」ニ「至」ス。

便宜上 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ トシテ n 個ノ「異」 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ト「含」
 「系」ト「区」間ノ Durchschnitte ト表ハス。次 =

$$\xi_1 \in (x_0, x_1), \xi_2 \in (x_1, \xi_1), \dots, \xi_n \in (x_{n-1}, \xi_{n-1})$$

ナル條件ヲ充タス n 次元空間ノ「異」 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 'Punktmengle'
 ヲ B トシテ表ハストスル。 $B =$

$$V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \text{sign}(\xi_1 - x_0)(\xi_2 - x_0) \cdots (\xi_n - x_{n-1})$$

ナル函数ヲ定義スレバ

$$\int_{x_0}^x \int_{x_1}^x \cdots \int_{x_{n-1}}^x f^{(n)}(x) dx^n = \int_B f^{(n)}(\xi) V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

ナルコトガ「容易」= 知ラレル。故ニ $V(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ガ「 $B =$ 」符号ヲ變ヘテ
 「レバ」 $= f^{(n)}(\xi) \int_B V(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n = f^{(n)}(\xi) \int_{x_0}^x \cdots \int_{x_{n-1}}^x dx^n$

ナル ξ が存在スル。即ち平均値定理が存在スル。 § 9

故に ξ_i が $(x, x_0, \dots, x_{i-1})$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) の内部に於て平均値定理が成立ス。又 ξ_i が $(x, x_0, \dots, x_{i-1})$ の内部に於て $x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+k} \neq x_{i+k+1}$ (k は偶数) となるトスルハ平均値定理が成立ス。即ち

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi_1) \int_{x_0}^x dx + \dots + f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) \int_{x_0}^x \dots \int_{x_{n-2}}^x dx^{n-1}$$

ナル ξ が存在ス。故に $x = x_0 + h, x_0 = x_1 = \dots = x_{n-3}, x_{n-2} =$

$x_{n-1} = x_0 + \frac{h}{n-1}$ トテハ "Mazgoni" の結果

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \dots + f^{(n-3)}(x_0) \frac{h^{n-3}}{(n-3)!} + f^{(n-2)}\left(x_0 + \frac{h}{n-1}\right) \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} + f^{(n)}(x_0 + \theta h) \frac{n-2}{n(n-1)} h^n$$

が得ラレオ $k+1$ 番目の項迄消スル

$$x = x_0 + h, x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_{k-2} = x_{k-1} = \dots = x_{n-1}$$

$$x_{k-1} = x_k = x_0 + \frac{h}{k} \quad (k \leq n-1)$$

$$\text{トテハ } f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \dots + f^{(k-2)}(x_0) \frac{h^{k-2}}{(k-2)!} + f^{(k-1)}\left(x_0 + \frac{h}{k}\right) \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} + f^{(k+1)}(x_0) \frac{k-1}{(k+1)k} h^{k+1} + \dots$$

$$+ f^{(n-1)}(x_0) \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{k^{n-k} (n-k)! (k-1)!} \right) h^{n-1}$$

$$+ f^{(n)}(x_0 + \theta h) \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{k^{n-k+1} (n-k+1)! (k-1)!} \right)$$

トナレ。次 = 任意, $\phi(x)$ = 対して平均値定理

第10.

$$\int_{x_0}^x \int_{x_1}^x \cdots \int_{x_{n-1}}^x \phi^{(n)}(x) dx^n = \phi^{(n)}(\xi) \int_{x_0}^x \int_{x_1}^x \cdots \int_{x_{n-1}}^x dx^n$$

か"成立する/ξ = x, x_0, x_1, ..., x_{n-1} か"充たす可中必要且充分条件、
条件ヲ求スルニヨリ。

$$\int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \int_{x_{n-1}}^{x_{n-2}} \phi^{(n)}(\xi_n) d\xi_n d\xi_{n-1} = \int_{x_{n-1}}^{x_{n-2}} \int_{\xi_n}^{x_{n-2}} \phi^{(n)}(\xi_n) d\xi_{n-1} d\xi_n$$

$$= \int_{x_{n-1}}^{x_{n-2}} \int_{\xi_n}^{x_{n-2}} \phi^{(n)}(\xi_n) d\xi_{n-1} d\xi_n$$

$$= \int_{x_{n-1}}^{x_{n-2}} \phi^{(n)}(\xi_n) d\xi_n \int_{\xi_n}^{x_{n-2}} d\xi_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x_{n-2}} \phi^{(n)}(\xi_n) d\xi_n \int_{x_{n-2}}^{\xi_n} d\xi_{n-1}$$

$$\therefore \int_{x_0}^x \int_{x_1}^x \phi^{(n)}(x) dx^n = \int_{x_{n-1}}^{x_{n-2}} \phi^{(n)}(\xi_n) d\xi_n \int_{\xi_n}^{x_{n-2}} d\xi_{n-1} \int_{x_{n-2}}^x \cdots \int_{x_{n-3}}^x dx^{n-2}$$

$$+ \int_{x_{n-1}}^{x_{n-3}} \phi^{(n)}(\xi_n) d\xi_n \int_{x_{n-3}}^{\xi_n} d\xi_{n-1} d\xi_{n-2} \int_{x_0}^x \cdots \int_{x_{n-4}}^x dx^{n-3}$$

$$+ \int_{x_{n-1}}^{x_{n-4}} \phi^{(n)}(\xi_n) d\xi_n \int_{x_{n-4}}^{\xi_n} d\xi_{n-1} d\xi_{n-2} d\xi_{n-3} \int_{x_0}^x \cdots \int_{x_{n-5}}^x dx^{n-4}$$

$$+ \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_0} \phi^{(n)}(\xi_n) d\xi_n \int_{x_0}^{\xi_n} \cdots \int_{\xi_n}^{x_{n-2}} d\xi_{n-1} d\xi_{n-2} \cdots d\xi_1$$

$$+ \int_{x_{n-1}}^x \phi^{(n)}(\xi_n) d\xi_n \int_{x_0}^{\xi_n} \cdots \int_{\xi_n}^{x_{n-4}} d\xi_{n-1} d\xi_{n-2} \cdots d\xi_1$$

$$\therefore V_i(x) = \begin{cases} \text{sign}(x_i - x_{i+1}) & , x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0 & , x \notin (x_i, x_{i+1}) \end{cases}$$

$(i = -1, 0, \dots, n-1)$ 且 $x = x_{-1} + \Delta x$
 となる数 ξ $-\infty < \xi < \infty$ 一定存在する

$$\int_{x_0}^x \int_{x_1}^x \int_{x_{n-1}}^x f^{(n)}(x) dx^n \\
= \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(\xi) \left\{ \sum_{i=1}^n V_i(\xi) \int_{x_1}^{\xi} \int_{\xi}^{\xi_{i+1}} \dots \int_{\xi}^{\xi_{n-2}} dx_{n-1} dx_{n-2} \dots dx_{i+1} \int_{x_0}^x \dots \int_{x_{i-1}}^x dx^n \right\} d\xi$$

故に平均値定理より成立するが、必要條件は

$$\sum_{i=0}^n V_i(\xi) \int_{x_1}^{\xi} \int_{\xi}^{\xi_{i+1}} \dots \int_{\xi}^{\xi_{n-2}} dx_{n-1} dx_{n-2} \dots dx_{i+1} \int_{x_0}^x \dots \int_{x_{i-1}}^x dx^n + V_{-1}(\xi) \int_{\xi}^{\xi_1} \int_{\xi}^{\xi_{n-2}} dx_{n-1} \dots dx_{n-2} dx_1 \\
= \sum_{i=0}^n V_i(\xi) \int_{x_i}^{\xi} \frac{(\xi_i - \xi)^{n-i-2}}{(n-i-2)!} dx_i \int_{x_0}^x \dots \int_{x_{i-1}}^x dx^n + V_{-1}(\xi) \frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} \\
= - \sum_{i=0}^n V_i(\xi) \frac{(x_i - \xi)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \int_{x_0}^x \dots \int_{x_{i-1}}^x dx^n + V_{-1}(\xi) \frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} \\
= V_{-1}(\xi) \frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{i=0}^{n-2} V_i(\xi) \frac{(x_i - \xi)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \int_{x_0}^x \dots \int_{x_{i-1}}^x dx^n$$

かつ $-\infty < \xi < \infty$ 一定存在する $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ 以外に一定の符号を持つ。

(9, 10, 12 参照)