



Title	函数ノ多葉性ニツイテ
Author(s)	尾崎, 繁雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 16, p. 4-9
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73881
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

4.

4.4 函数・多葉性 = ツイテ

尾崎繁雄 (東京文理大)

最初 = 多葉性・判定条件 = ツイテ, 次 = 市原氏論説 (13号38) を讀
ミテ "既ノ付イタ事ヲ述ベテ 見タイト 思ヒマス。

又, 函数 尖角 ヲモタヌ様ト正則曲線 γ = ヨリ 囲マレタ 單一連結
閉範圍ヲトスル。 $f(z)$ ハ D 内テ "正則テ", γ 上ノ z = 対シテハ, $f'(z) \neq 0$
トスル。

1° γ カルトキハ, $f(z)$ ガ D 内テ "多葉テ" アルトスレバ, z ガ γ 上ヲ一
周スル場合, $\text{amp } \Delta f(z)$ ノ 全変動 (total variation) ハ 明カニ少ク
モ $2k\pi$ テ"アル。

2° 故ニ γ 上ニ於テ $\text{amp } \Delta f(z)$ ノ 全変動カ $2(k+1)\pi$ より小
ナル場合, 即チ

$$\int_{\gamma} |d \text{amp } \Delta f(z)| < 2(k+1)\pi$$

ナル場合ハ, $f(z)$ ハ D 内テ "高々 k 葉テ" アル。

3° 從ツテ D ガ 凸範圍テ"アル場合ニハ, γ 上ノ z = 対シテ

$$\left| \frac{d \text{amp } \Delta f(z)}{d \text{amp } dz} \right| < k+1$$

ナル関係ガ"アルハ, $f(z)$ ハ D 内テ "高々 k 葉テ" アル。

是等ノ事柄ヲ用ヒテ 次ノ定理ガ 得ラレル

定理 1. $f(z)$ ヲ $|z| \leq 1$ = 於テ 正則トスル。

$$\int_0^{2\pi} \left| 1 + R \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right| d\theta < 2(k+1)\pi, \quad (z = e^{i\theta})$$

ナル関係ガ"アルハ, $f(z)$ ハ $|z| \leq 1$ テ "高々 k 葉テ" アル。

証明。 $f'(z) = Re^{i\theta}$, $z = e^{i\theta}$ トヲケハ

$$\frac{\text{damp } df(z)}{\text{damp } dz} = \frac{\text{damp } dz + \text{damp } f'(z)}{\text{damp } dz} = 1 + \frac{d\theta}{d\theta}$$

$$= 1 + R \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

故 $|z|=1$ 上 $\text{damp } df(z)$ の全変動は $2\pi(k+1)$ である。
 $\int_0^{2\pi} \left| \frac{\text{damp } df(z)}{\text{damp } dz} \right| \text{damp } dz = \int_0^{2\pi} \left| 1 + R \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| d\theta < 2(k+1)\pi$

故 $f(z)$ は $|z| \leq 1$ 上で高々 k 葉である。

次に、次の容易に得られる。

系1. $f(z)$ が $|z| \leq 1$ 上正則関数とする。 $|z|=1$ 上

$$\left| 1 + R \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| < k+1$$

トハ、 $f(z)$ は $|z| \leq 1$ 上で高々 k 葉である。

この系を用いて、次の定理を得る。

定理2. $f(z) = z^k + a_{k+1}z^{k+1} + a_{k+2}z^{k+2} + \dots$ (k 正整数)

ノ係数間 =

$$k(p-k+1) \geq \sum_{n=k+1}^{\infty} n(n+k-1) |a_n| \gamma^{n-k} \quad (k \leq p)$$

との関係がある。 $f(z)$ は $|z| < \gamma$ 上正則且高々 p 葉である。

証明。 $f(z)$ の $|z| < \gamma$ 上正則性より、假定する等式を用いて

左辺の半径を計算すれば、容易に得られる。次に $|z| < \gamma$ 上

$$p+1 - \left| 1 + R \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \geq p+1 - 1 - \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right|$$

$$\begin{aligned}
 &> p - \frac{k(k-1) + \sum_{n=k+1}^{\infty} n(n-1)|a_n| r^{n-k}}{k - \sum_{n=k+1}^{\infty} n|a_n| r^{n-k}} \\
 &= \frac{k(p-k+1) - \sum_{n=k+1}^{\infty} n(n+p-1)|a_n| r^{n-k}}{k - \sum_{n=k+1}^{\infty} n|a_n| r^{n-k}} \geq 0.
 \end{aligned}$$

故に $f(z)$ は $|z| < r$ で正則且單葉である。

この定理は、 $k=1$ の場合は市原氏の定理 (数学輯報 10 卷 75 頁 定理 2) と類似した次の結果を得る。

系 2. $\phi(z) = z + a_2 z^2 + \dots$

ノ係数間 =
$$p \geq \sum_{n=2}^{\infty} n(n+p-1)|a_n| r^{n-1}$$

との関係がある、 $\phi(z)$ は $|z| < r$ で正則且高々 p 葉である。

注意 1. 系 2 は $p=1$ の場合、古くから知られた結果である、 $\phi(z)$ は $|z| < r$ の凸範囲を描く。

注意 2. 定理 2 は $k=p$ の場合、 $f(z)$ の係数間 =
$$p \geq \sum_{n=p+1}^{\infty} n|a_n| r^{n-p}$$

との関係がある、 $f(z)$ は $|z| < r$ で p 葉である (拙論、東京文理大紀要 A, 2, 1934, 49p, 定理 10) この条件の方が幾分精密である。

本系紙 13 号 38 は、 $f(z)$ は市原氏の面積定理を拡張する。この証明方法を知りたい。これは幾分一般の次の結果が成立する。

定理3 $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ (k正整数, $a_{-k} \neq 0$)

マ $0 < |z| < 1$ へ於て正則な関数トスレバ、係数間 = $\sum_{n=-k}^{\infty} n |a_n|^2 \leq 0$

ナル関係カアル。

シカシ $a_{-k} = 0$ ナル場合ハ係数間トシテ関係カアルカ
ヲカラナイ。市原氏ノ問題カコノ場合ノ解答ヲ求メテモナシ
アレハ" ココニ述ベル事ハ無意味トナシ。

又証明ヲ"アルカ" $f(z)$ ハ $z=0$ カ"次数ノ極大ナル
カラ、 z カ"単位円周上ヲ正方向ニ一周スレバ" $f(z)$ ハ ∞ ト
リコイテ正方向ニ一周スル様ナ曲線ニシテ画ク。シカモ $f(z)$ ハ
假定ニヨリ"代数"アルカラシニヨリ"囲マレル"無限マカナル部分
ノ面積ハ確カニ負ニナル。從ツテ面積定理ノ証明ト同様
ニシテ上ノ結果カ証明シキル。

正誤 Algebraic function = 京大 (6号) - 吉田耕作。

6号4頁14行 $f(x, a_{\alpha_s}), f(x, a_{\alpha_{s+1}}), \dots, f(x, a_{\alpha_p})$
ノ中ノ λ コヲ除イテ何レノ $f(x, a_{\alpha_\lambda})$ モ $f(x, a_{\alpha_1}), \dots, f(x, a_{\alpha_{s-1}})$
ト一次独立ナル。ト云フハ"誤リ"シテ。

$f(x, a_{\alpha_1}), f(x, a_{\alpha_2}), \dots, f(x, a_{\alpha_{s+1}})$ 等ノ中カラ適當
= $s-1 = p-\lambda$ コヲエラベ"ハ" (但シ其中 = $f(x, a_{\alpha_1})$ ヲ含マセヨイ)

$f(\lambda, a_{\lambda_i}), \lambda = 1, 2, \dots, q$ からなる時、 $\forall \lambda$ コヲノソ"イタノコリノ $f(\lambda, a_{\lambda_i})$ ハイツ"レモ之等 $\forall \lambda$ コノ $f(\lambda, a_{\lambda_j})$ ノ系ト一次独立ニナル。但シ高々 λ コノ $f(\lambda, a_{\lambda_i})$ ハ T 余カ + 4レハ" + ラヌカモシレナイ。——之丈ノコトシカモイマセン。イ延ツツ λ 以下ノ λ 個立論ハツ"キテ"ス。

テ"スカ 最後ノ注意ニ述ベ"タヤロキ定理 (Cartan, 定理ノ拡張?) 丈ハモハル言足テ"ス。ZP4

一次独立ナ 整 函数 $g_1, g_2, \dots, g_s$ / linear combination

$F_1, F_2, \dots, F_q$ カ",

$F_{\alpha_s}, F_{\alpha_{s+1}}, \dots, F_{\alpha_t}$ ノ内ノ λ コヲノソ"イテ何レノ F_{α_i} * $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \dots, F_{\alpha_{s-1}}$ +ル系ト一次独立テ"アレ

ヲ満足スレハ"

$$((q - \nu - 1)(1 - \frac{\lambda}{\nu}) - \frac{\lambda}{\nu}) T(Y) \leq \sum_{i=1}^q N_{\nu-\lambda}(Y, F_i = 0) + S(Y)$$

$$T(Y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m_{\lambda}^{\nu} \log |g_i(x)| d\theta$$

$x = re^{i\theta}$

Algebraic, 土易カ合テ"スト 6 号 5 頁 (7) ノ代リニ, 上ノ linear independency カラ, 6 号ト同本義ニシテ

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda+1} Q(\lambda) + \sum_{\lambda=p+1}^{q-1} Q(\lambda) \leq \sum_{\lambda=1}^q N(Y, a_{\lambda_i}) + S(Y)$$

$$Q(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\lambda, a_{\lambda_i})| d\theta$$

ハイヘマス。(Algebraic function = 京大 7, 10 号 参照)

