45. アル種ノRiemann面ノ等角描寫ニツイテ

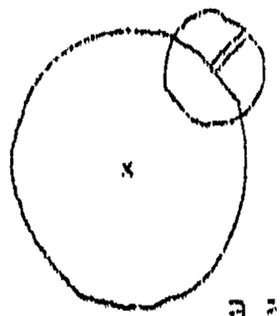
小林善一（東京高師）

今春ノ數物總會デアル種ノRiemann面ニ対スル一点ヲ除イタ一枚ノ全平面ニ等角ニ描寫デキル為ノ一ツノ十分條件ヲ述ベタ。

今Riemann面Fガ

I　Fニ属スル円板（單葉又ハ複葉）ヲ作ルトキ一点ヲ除ケバスベテ、此ノ内点ガFニ属スルナラバ此ノ一点モ亦Fニ属スル。

II　Fノ單葉円板Dノ周上ニアルRand-pointハ之ヲ中心トシ半徑ニ副ツテ切断ノアルFノ切断円板ガ作レル。但シ切線ハDノ周ト直角ニ外方ニ向フモノトスル。



III　Fハ單一連結デアル。

ヲ満足スルモノトシ之ヲ（K）-classト呼バウ。

周ニ少クトモ二ツノ特異点ノアル円板（單葉）ヲ生産円板ト呼ビ、ソノ特異点（有限ノモノ）カラ円板ノ中心ニ引イタ直線ヲ生産矢線ト呼ブコトニスル。

生産円板ノ球面中心（円板ノ球面射影デ生ズル球面円板ノ中心ニ対応スル点）ノ軌跡ハ連結的ナ線系デアル。之ヲSトスル。Fヲ位相変換ニヨツテ一点ヲ除イタ全平面ニ描写スルトキSノ描写ヲTトシTヲ、位相樹木ト呼ブコトニスル。位相樹木ノ弧ノ角長トハ対応スル二円板ノ分岐点ヲ共有スル生産矢線ノ間ノ角ヲ基トシテ測ルコトトシTノ任意ノ点tヲ定点t_0ニ結ブTノ單一曲線ノ角長ノ

最小ヲモツテtノt_0カラノ角距離ト呼ブコトトスル。

t_0カラθナル角距離ニアルTノ点ノ数ヲ$\mu(\theta)$，又

$$\lambda(\bar{\theta}) = \max_{\theta \leqq \bar{\theta}} \mu(\theta)$$

トオク。又$\theta < \bar{\theta}$ニアルTノ角長ノ和ヲ$\rho(\bar{\theta})$トスレバ

$$\rho(\bar{\theta}) = \int_0^{\bar{\theta}} \mu(\theta)\,d\theta \leqq \bar{\theta}\lambda(\bar{\theta})$$

定理 I. (K)-class ノ Riemann 面 F ニ於テ $\int_{\theta_0}^{\infty} \frac{d\theta}{\theta\lambda(\theta)}$ ガ発散スレバ F ハ抛物的デアル。

ガ成立スル。春ノ報告ノ際、Fノ無限遠点ニハ特異点ノナイコト及ビt_0ニ対応スル生産円板ノ中心ガ有限ニアルコト等ノ條件ハ取リ去リ得ル。

尚コノ定理デハアル種ノ楕円函数例ヘバsn zノ逆函数ノRiemann面ニハ効力ガ及バナイ。

進ンデ

定理 II (K)-class ノ Riemann 面 F ニ於テ $\int_{\theta_0}^{\infty} \frac{d\theta}{\rho(\theta)}$ ガ発散スレバ F ハ抛物的デアル

ガ証明デキル様デアル。之ダトIヨリ多少有力デアルガ前記ノ例ニ効果ノ及バナイコトハ前ト同様デアル。

定理IIノ証明ノ概要ハ次ノ通リデアル。

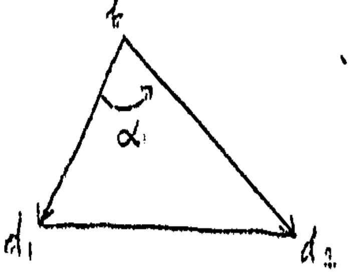
面Fヲ次ノ線ニヨツテ三角形又ハ二角形範囲ニ分ケル。

1° 生産中心ノ軌跡

2° 定円板D_0（t_0ニ対応スルモノ）ノスベテノ生産矢線

3° 節円板（周ニ三以上ノ分岐的ノアルモノ）ノスベテノ生産矢線

4° 極限円板（樹木TノPoint節点，定点 t_0 ヲ含マヌ単一弧上デ t_0 カラノ角距離ノ最大ナルモノニ対応スル円板）ノスベテノ生産矢線



ソノ中ノ一ツ bd_1d_2 ヲトル。

$$\begin{cases} b; & \text{分岐点} \\ bd_1,\ bd_2; & 2°, 3°, 4° \text{ノ何レカニ属スル矢線} \\ d_1d_2; & 1° \text{ノ部分} \end{cases}$$

D_0 カラノ角距離 θ ヲ増加スルニツレテ対応スル矢線ガ b ヲ中心トシテ反時計廻リヲナスモノヲ（+）類，時計廻リヲナスモノヲ（−）類ト呼ブ。（+）類ニ於テハ

(1) $$y = \log(w-b) + (m-a)i$$

但シ $$\begin{cases} \omega: & \text{Fノ複素平面ヲ表ハス数} \\ a = Amp(d_1 - b) & \\ m: & bd_1 \text{ノ } D_0 \text{ カラノ角距離} \end{cases}$$

ニヨツテ $\triangle bd_1d_2$ ヲ $m < I(y) < m+\alpha$ ニ描写スル。（−）類ノ $\triangle bd_1d_2$ ヲトルトキ

(2) $$y = \overline{\log}(w-b) + (m+a)i$$ 但シ $\overline{\log}\,x$ ハ $\log x$ ノ共軛函数

ニヨツテ $m < I(y) < m+\alpha$ ニ描写スル。

Fハ(1)又ハ(2)ニヨツテ部分的等角（角ノ対応ハ±ニ様）ニ壔状面Yニ描写サレル。次ニFヲ

$$z = z(w)$$

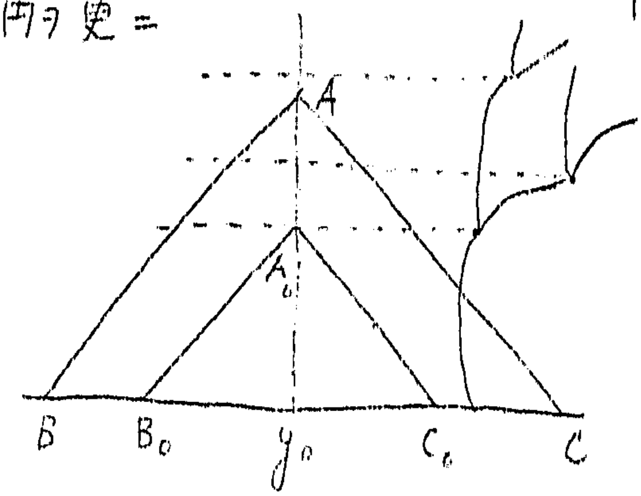
ニヨツテ、$|z|<R$ ニ描写シ此ノ円ヲ更ニ

$$u = \log z$$

ニヨツテ帯状範囲

$$0 \leqq \mathfrak{I}(u) < 2\pi$$

ニ描写スル。



p_0ハ定円板D_0ノ一矢線上ノ有限点トシY上ニハy_0ニ、z平面デハ$z=0$ニ対応スルモノトスル。Yヲy_0ヲ斜辺ノ中点トスル直角三角形ABCデ切レ。ソノ内部ヲ$Q(\theta)$（但シ$\theta = y_0A$）トスル。切口ハYノ内点ヲ走ル故、$Q(\theta)$ニハz-平面デハ$q(\theta)$ガ、u-平面デハ$q'(\theta)$ガ対応スルモノトシ之等ノ周ハ夫々内点ヲ走ル。

$q(\theta)$ハ$z=0$ヲ含ミ$|z|=R$ニ含マレル故 $z=0$ヲ含ム少クトモ一ツノ巡回路ガアル。故ニ$q'(\theta)$ノ周ハ帯ノ内部ヲ走リ周ノ長サ$l(\theta)$ハ

(3) $$l(\theta) \geqq 2\pi$$

且 $$l(\theta) = \int_{BAC} \left|\frac{du}{dy}\right| |dy|$$

デアル。Schwarzノ不等式ニヨリ

(4) $$4\pi^2 \leqq (l(\theta))^2 \leqq \int_{BAC} |dy| \int_{BAC} \left|\frac{du}{dy}\right|^2 |dy|$$

然ルニ

(5) $$\int_{BAC} |dy| \leqq 2K_1 \int_0^\theta n(\theta)\,d\theta,$$ 但シ $\left\{\begin{array}{l} K_1 ; \text{常数} \\ n(\theta)\text{ハ高サ}\theta\text{ニ於ケルYノ葉数} \end{array}\right.$

條

又 $B_0A_0C_0$ 及ビ BAC デカコマレル範圍ニ對應スル帶狀範圍ノ面積ヲ $A(\theta)$ トスルト

$$(6)\qquad A(\theta) = K_2 \int_{\theta_0}^{\theta_0} \left\{ \int_{BAC} \left|\frac{du}{dy}\right|^2 |dy| \right\} d\theta$$

K_2 ハ常數
$\theta_0 = y_0A_0$

デアル。故ニ

$$(7)\qquad \frac{1}{K_2}\frac{dA}{d\theta} = \int_{BAC} \left|\frac{du}{dy}\right|^2 |dy|$$

(4), (5), (7) カラ

$$2\pi^2 \leqq \frac{K_1}{K_2}\int_0^\theta n(\theta)\,d\theta \times \frac{dA}{d\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{K_3}{\int_0^\theta n(\theta)\,d\theta} \leqq \frac{dA}{d\theta}$$

K_3 ハ常數

$$\therefore \quad K_3\int_{\theta_0}^{\theta}\left\{\frac{1}{\int_0^\theta n(\theta)\,d\theta}\right\}d\theta \leqq A(\theta) \leqq 2\pi(\log R - \log R_0)$$

$$R_0 = \min_{y \text{ on } A_0B_0C_0} |z|$$

故ニ $\int_{\theta_0}^{\theta}\left\{\frac{1}{\int_0^\theta n(\theta)\,d\theta}\right\}d\theta$ ガ發散スレバ F ハ抛物的デアル。

シカルニ F ニ於ケル節デナイ生座円板ノ分岐点ガニツ次有限ナラバ矢線ハニツ、一ツダケ有限ナラバ一ツデアルカラ、

$$\mu(\theta) \leqq n(\theta) \leqq 2\mu(\theta)$$

$$\therefore \quad \rho(\theta) = \int_0^\theta \mu(\theta)\,d\theta \leqq \int_0^\theta n(\theta)\,d\theta \leqq 2\int_0^\theta \mu(\theta)\,d\theta.$$

9年10月18日 受取。