



Title	函数ノ单数性ニ関スル注意
Author(s)	尾崎, 繁雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 16, p. 15-20
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73883
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

46 函数, 單葉性 = 関スル注意

尾崎繁雄 (東京文理大)

本紙 12号36 / 金岡谷氏 / 論説ヲ補充スル"ツモリ"テ"次"ノ結果ヲ述"ベ"テ見タイ。

定理4 $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$

カ" $|z| < 1$ テ"正則"テ"シカモ ココテ"

$$|f(z) - z| < M$$

ヲ満足スレハ" $f(z)$ ハ $|z| < r_0 = \min\left(\frac{1}{\sqrt{1+M}}, \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)$ テ"單葉"ナル。 $r_0 = \frac{1}{\sqrt{1+M}} \leq \frac{\sqrt{17}-1}{4}$ ナル場合ハ

$$f(z) = z + \frac{r_0 - z}{1 - r_0 z} M z^2$$

= ヲツテ極限ノ場合カ"達セラレル。

証明 $\phi(z) = \frac{f(z) - z}{z^2}$ トオケハ $\phi(z)$ ハ $|z| < 1$ テ"正則"テ"アルカラ $|z| < 1$ = 於テ $|\phi(z)| < M$ テ"アル。從テヨク知ロシ有界函数ノ性質=ヨリ

$$|\phi'(z)| \leq \frac{M^2 - |\phi(z)|^2}{M(1 - |z|^2)}$$

ヲ得ル。 $\phi'(z) = \frac{f'(z) - 1 - 2z\phi(z)}{z^2}$ ナルコトカ"容易"ニ計

算"キレカラ結局

$$\begin{aligned} |f(z) - z| &\leq \frac{M^2 - |\phi(z)|^2}{M(1 - |z|^2)} |z|^2 + 2|z| |\phi(z)| \\ &= \frac{M^2 |z|^2 - |\phi(z)| |z|^2 \left\{ \frac{2(1 - |z|^2)}{|z|} M - |\phi(z)| \right\}}{M(1 - |z|^2)} \end{aligned}$$

故ニ $\frac{2(1 - |z|^2)}{|z|} \geq 1$ ナラハ" 即チ $|z| \leq \frac{\sqrt{17}-1}{4}$ ナラハ"

$$\leq \frac{M^2 |z|^2}{M(1-|z|^2)}$$

16

従て $|z| < \frac{1}{\sqrt{1+M}}$ 十分小

$$|f'(z) - 1| < 1 \quad \text{即ち} \quad \Re f'(z) > 0$$

故に熊代氏1定理 " $\phi(z)$ が凸領域 D 内で正則で、且、ここて $\Re \phi'(z) > 0$ ならば $\phi(z)$ は D 内で単葉である" により $f(z)$ は $|z| < \min\left(\frac{1}{\sqrt{1+M}}, \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)$ で単葉である。

但し、定理 4 の M が相当に小さい値の場合でも $f(z)$ の単葉性には $|z| < \frac{\sqrt{17}-1}{4}$ によって与えられるハカリで精密な単葉半径を求める事ができる。しかし定理 4 の仮設の下では $f(z)$ の M の値は無関係に $|z| < \frac{1}{\sqrt{1+M}}$ で単葉であるらしいが、今この矛盾が生ずる。この事が証明出来る事であり、次に定理 4' も十分小なる M に対しては幾分役立つ筈である。

定理 4' $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$

が $|z| < 1$ で正則で、しかもここて

$$|f(z) - z| < M (< 1)$$

が満足すれば $f(z)$ は $|z| < \sqrt{1-M}$ で単葉である。

証明は $\phi(z) = f(z) - z$ とおく事は、より定理 4 と同じ方針で容易である。

定理 5 $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$

が $|z| < 1$ で正則で、しかもここて

$$|f'(z) - 1| < M$$

ヲ満足スルハ $f(z)$ ハ $|z| < \min(1, \frac{1}{M})$ テ"單葉"ナル。
極限ノ場合ハ、

$$f(z) = z + \frac{M}{2} z^2$$

ニヨリテ到達カレル。

証明. Schwarz / lemma = ヨリ $|f'(z) - 1| < M|z|$ ($|z| < 1$)
故 = 定理4 ト同シ"針"テ"容易"ニ証明"ナル。

~~~~~。~~~~~

最後 = 本紙 9 号 25 = 於テ 高橋氏ガ引合ヒ = 出シテナル Bieberbach / 定理 (Crelle Journal 157, (1927) 189-192) ヲ  
少シ精密ニシテ見タイ。ミカシ尚コレガ正 確 + 制限ヲ与ヘテナル  
モノトハ思ハレタイ。

定理 6  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$  ナ  $|z| \leq \rho_0$  ( $\rho_0 > 1$ ) = 於テ pole  
ヲ除クハ"正則", 且ツ  $\frac{f(z)}{z} \neq 0$  トスル。  $|z| = \rho_0$  上テ"

$$|f(z)| > \frac{\rho_0}{\sqrt{1 + |a_2|^2 + \frac{(\rho_0^2 - 1)^3}{\rho_0^2 + 1}}} \quad (1)$$

ナラバ  $f(z)$  ハ  $|z| < 1$  テ"單葉"ナル。

コノ定理 = 於テ (1)ノ右辺 = アル  $|a_2|^2$  ヲ無視スルハ" Bieberbach  
定理 1' "ガ得ラルル。尚 定理 1' ガ"常" = 定理 1 ヲリモ 精密 + ルモノトハ  
容易 = 証明"ナル。

証明,

$$\eta = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 + |a_2|^2 + \frac{(\rho_0^2 - 1)^3}{\rho_0^2 + 1}}} \quad (2)$$

トナケハ"

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots$$

ハ  $0 < |z| \leq \rho_0$  上  $f(z)$  正則  $f(z)$   $|z| = \rho_0$  上  $f(z)$   $\left| \frac{1}{f(z)} \right| < \frac{1}{m}$  上  $f(z)$  アル  
 カ  $z = \rho_0 e^{i\theta} = \rho_0 e^{i\theta}$  上  $f(z)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{f(z)} \right|^2 d\theta = \sum_{n=-1}^{\infty} |b_n|^2 \rho_0^{2n} \quad (b_{-1} = 1)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \rho_0^{2(n+1)} = \frac{\rho_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{f(z)} \right|^2 d\theta < \frac{\rho_0^2}{m^2}$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n| &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \rho_0^{2(n+1)}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left( \frac{1}{\rho_0} \right)^{2(n+1)}} \\ &< \sqrt{\frac{\rho_0^2}{m^2} - |b_0|^2} \sqrt{\frac{1 + \left( \frac{1}{\rho_0} \right)^2 \left( \frac{1}{\rho_0} \right)^4}{\left\{ 1 - \left( \frac{1}{\rho_0} \right)^2 \right\}^3}} = \sqrt{\frac{\rho_0^2}{m^2} - |a_2|^2} \sqrt{\frac{\rho_0^2 + 1}{(\rho_0^2 - 1)^3}} \\ &= 1 \quad [(2) = \text{ユル}] \end{aligned}$$

故  $= \frac{1}{f(z)}$  ハ  $|z| < 1$  上  $f(z)$  單葉  $f(z)$  アル。 [拙論東京文理大紀要 A.2 (1934)

41頁 Lemma 1 参照] 従  $f(z)$   $|z| < 1$  上  $f(z)$  單葉  $f(z)$  アル。

尚  $\rho_0$  が相當 1 に接近  $\Rightarrow$   $f(z)$  アル場合  $\Rightarrow$  ハ寧ろ次ノ定理が有効  $f(z)$  アル。

定理 7.  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$  カ  $|z| \leq \rho_0$  ( $\rho_0 > 1$ ) 上  $f(z)$  pole  
ヲ除ケバ正則、且  $\frac{f(z)}{z} \neq 0$  トスル。  $|z| = \rho_0$  上  $f(z)$

$$|f(z)| > \sqrt{2\rho_0 - 1}$$

ナラバ  $f(z)$  ハ  $|z| < 1$  上  $f(z)$  單葉星型  $f(z)$  アル。

コノ定理ヲ証明スルハ是ト同値ナル次ノ定理ヲ証明スルハヨイ。

定理 7'  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$  カ  $|z| \leq 1$  上  $f(z)$  pole ヲ除ケバ  
正則、且  $\frac{f(z)}{z} \neq 0$  トスル。  $|z| = 1$  上  $f(z)$   $|f(z)| > m$  ナラバ

(コトヲ當然  $m \leq 1$  トナル)  $f(z)$  ハ  $|z| < 1 - \sqrt{1-m^2}$  テ

單葉 ~~星型~~ 星型 テナル。

証明  $\varphi(z) = \frac{z}{f(z)}$  トシテハ  $\varphi(z)$  ハ  $|z| \leq 1$  テ正則 テシカモ

コトテ  $|\varphi(z)| < \frac{1}{m}$  トナルカラ  $\varphi(0) = 1$  トルコトニ注意スルハ

有界函数ノ性質ヨリ  $\varphi(z)$  ハ実軸上ニ  $=$  実  $\frac{1 - \frac{|z|}{m}}{\frac{1}{m} - |z|}$ ,  $\frac{1 + \frac{|z|}{m}}{\frac{1}{m} + |z|}$

ヲ結ブ線分ヲ直径トスル円内ノ値ヲトル。故ニ  $|z| < m$  ニ於

テハ

$$|\varphi(z)| > \frac{1 - \frac{|z|}{m}}{\frac{1}{m} - |z|} = \frac{m - |z|}{1 - m|z|}$$

トナル。故ニ

$$|\varphi(z)| \leq m \frac{\frac{1}{m^2} - |\varphi(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

テナルカラ

$$\left| 1 - \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq m \frac{\frac{1}{m^2} - |\varphi(z)|^2}{1 - |z|^2} |f(z)| = \frac{|z| \left\{ \left| \frac{m}{\varphi(z)} \right| - \left| \frac{\varphi(z)}{m} \right| \right\}}{1 - |z|^2}$$

故ニ  $|z| < m$  ニ於テハ

$$\leq \frac{|z| \left\{ \frac{1 - m|z|}{m - |z|} - \frac{m - |z|}{1 - m|z|} \right\}}{1 - |z|^2}$$

從テ  $|z| < 1 - \sqrt{1-m^2}$  ニ於テハ  $< 1$

結局  $|z| < 1 - \sqrt{1-m^2}$  ニ於テ  $\Re \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$  即チ單葉星型

トナル。[拙論、東京文理大紀要 A, 2 (1934), 49頁 定理 9' 參照]

尚定理 9' ニ於テ極限 1 場合ハ

$$f(z) = \frac{1-m^2}{m-2} mz$$

ニヨリ至リ達スル。コノ定理ハニルノ義ニ換言スルコトモ テナル。

定理 7  $\varphi(z) = z + a_2 z^2 + \dots$   $\text{カ}'' |z| \leq 1$   $\varphi''$  正則  $\varphi'' \neq 0$   
 ココ  $\varphi''$   $|\varphi(z)| < M$   $\text{ナラハ}$   

$$f(z) = \frac{z^2}{\varphi(z)} = z + a_2 z^2 + \dots \quad \text{ハ } |z| < \frac{M - \sqrt{M^2 - 1}}{M} \quad \varphi''$$

單葉型  $\varphi''$ 。

序 = 能代氏 / 論説 (12号 35) = 然レ  $f(z) = \text{pole}$  存在ヲ言フニ  
 モ同様ノ結果カ得ラルルカラ注意シテオキタイ。

定理 8  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$   $\text{カ}'' |z| < \rho_0$  ( $\rho_0 > 1$ )  $\varphi''$  pole  
 ヲ除ケハ正則  $\varphi'' \neq 0$   $|f'(z)| > \rho_0$   $\text{ナラハ}$   $f(z)$   $|z| < 1$   
 $\varphi''$  單葉  $\varphi''$  アル。

証明  $\frac{1}{f'(z)}$   $|z| < \rho_0$   $\varphi''$  正則  $\varphi'' \neq 0$   $\left| \frac{1}{f'(z)} \right| < \frac{1}{\rho_0}$   $\varphi''$  アル

カラ  $\frac{1}{f'(0)} = 1$   $\text{ナラハ}$   $\varphi''$  注意スルハ  $\frac{1}{f'(z)}$   $\text{ハ}$  実軸上ノ  $\varphi''$   $\frac{\rho_0 - \frac{1}{\rho_0}|z|}{1 - |z|}$

$\frac{\rho_0 + \frac{1}{\rho_0}|z|}{1 + |z|}$   $\varphi''$  結フ線分ヲ直径トスル円内ノ値ヲ取ル。故ニ

$|z| < 1$   $\text{ニ於テハ}$   $\Re f'(z) > \frac{2\rho_0}{\rho_0^2 + 1} > 0$   $\text{ナラハ}$   $f(z)$   $|z| < 1$   
 $\varphi''$  單葉  $\varphi''$  アル。

(9年10月18日 慶取)