



Title	所謂同値律ニツイテ
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 17, p. none-none
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73884
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

47. 所謂同値律=フイ 北川 敏男 (阪大)

集合 X = 於テ、ソノ元素 = 同値トイフ概念ナル快、普同ニ三律ヲ要請スル。I. X ノ任意ノ元素 a ニ對シテ $a \sim a$ (反射律)

II $a \sim b$ トラバ $b \sim a$ (対稱律)

III. $a \sim b, b \sim c$ トラバ $a \sim c$ (移置律)

筆者ガ、問題ニスルハ、Iニ關シテアルガ、極メ見聞ノ狭イ筆者デアルカ
或ハ既ニ解決サレタ事カ、或ハ重大ナ誤リヲオカシテ居ハスマカト恐レル
デアルケドモ、多年氣ニカツテ仕方ノナイ問題故、貴方ナ一頁ヲオ借リテ
諸賢ノ御高教ヲオ願ヒ致ス次第デアル。

先ヅ II, III 共ニ 假言的命題デアルカ、或ル a ニ對シテニト *equivalent*
valent (即チ $a \sim a'$)ナル a' ノ存在スルヲ否トハ 保証セテナシ、
存在ヲ保証スルハ、Iデアル。サレド 存在ヲ保証スルタメノ要請ト
シテハ、甚ダ 不可思議ナ形デアル。何故ニ 端的ニ、Iニ代フルニ

I' X = 居スル 任意ノ a ニ對シ $a \sim a'$ ナル a' ガ存在ス
ル、(勿論 $a' \in X$)

ヲ以テ ナシデアルカ? カフルニ、論理學ノ同一律 $A \sim A$ デアル
ト峻別スベキデアル以上、Iヲステ I'ヲトルベキデハナシカ?

I', II, III, 假定、モトニ、Iガ導カレルコトハ明カデアル、任意ノ a
ニ對シテ

$a \sim a'$ ナル a' カアル、IIニヨリテ $a' \sim a$

IIIニヨリテ $a \sim a$ トナル。

公準系 I', II, IIIガ 矛盾ニナレトハ、 a ノ唯一ノ要素トスル
集合ヲ考ヘバ 明デハアル ト思フ。

正誤 一才+大馬46 函数ノ單葉性 = 誤スル注意 (尾崎繁雄)²

定理4ノ証明中 = 計算適ヒカ"アリマシタ"ヲ"訂正"シマス

定理4 $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$ $|z| < 1$ 正則ヲ"且" ココヲ" $|f(z) - z| \leq M$ トスル。シカレトキハ $f(z)$ ハ $|z| < r_0$ 正則ナリ。ココ = $M \geq \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ トレトキハ $r_0 = \frac{1}{2M} (\leq \frac{\sqrt{5}-1}{2})$ 又 $M < \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ トレトキハ $r_0 = \sqrt{\frac{(1-M)(1+3M)}{2M}} (> \frac{\sqrt{5}-1}{2})$

証明 $\varphi(z) = \frac{f(z)-z}{z^2}$ トシテハ $\varphi(z)$ ハ $|z| < 1$ 正則ヲ"アルカ $|z| < 1$ = 令テ $|\varphi(z)| \leq M$ 正アル。從ツテヨルク矢口アレタ有界函数ノ性質 = ヲリ $|\varphi'(z)| \leq \frac{M^2 - |\varphi(z)|^2}{M(1-|z|^2)}$ シ得ル。

$$\varphi'(z) = \frac{f'(z) - 1 - 2z\varphi(z)}{z^2} \quad \text{アレコトガ容易 = 計算ヲ"キレ"カ$$

$$\begin{aligned} \text{結局} \quad |\varphi'(z) - 1| &\leq \frac{M^2 - |\varphi(z)|^2}{M(1-|z|^2)} |z|^2 + 2|z||\varphi(z)| \\ &= \frac{M^2|z|^2 + |\varphi(z)|^2|z|^2 \left\{ \frac{2(1-|z|^2)}{|z|} M - |\varphi(z)| \right\}}{M(1-|z|^2)} \dots (1) \end{aligned}$$

極値ヲ求ル簡單+計算 = ヲリ石也ノ分ナリ (2)

$$|\varphi(z)| = \frac{1-|z|^2}{|z|} M \quad \text{ハ最大トナル。然レシ $|\varphi(z)| \leq M$ タカラ$$

$$\frac{1-|z|^2}{|z|} > 1 \quad \text{アルカ} \quad |z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{トレトキハ (1)ノ右也ノ最大ハ $|\varphi(z)| = M$ / 中ニ起ル。コノ中 $|\varphi'(z) - 1| \leq \frac{M^2\{|z|^2 + 2|z|(1-|z|^2) - |z|^2\}}{M(1-|z|^2)} = 2M|z|$$$

故 $= |z| < \min\left(\frac{1}{2M}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ ならば 即ち $\Re f'(z) > 0$. 故に能代氏
ノ定理 " $f(z)$ が凸範囲 D 内を正則に且 $\Re f'(z) > 0$ ならば"
 $f(z)$ は D 内を單葉に"アル. $\therefore f(z)$ は $|z| < \min\left(\frac{1}{2M}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ を
單葉にアル. 又云ふに $M \geq \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ならば $f(z)$ は $|z| < \frac{1}{2M}$ を單
葉にアル. 之を $\frac{1-|z|^2}{|z|} \leq 1$ 即ち $|z| \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ なる場合ニハ (1)

ノ右辺ニ (2) = ヲリ $|f(z)| = \frac{1-|z|^2}{|z|} M$ ノ中最大トナル. コノトキ
 $|f'(z)-1| \leq \frac{M^2|z|^2 + (1-|z|^2)^2 M^2}{M(1-|z|^2)} = \frac{M(1-|z|^2 + |z|^4)}{1-|z|^2}$

故に $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq |z| < \sqrt{\frac{\sqrt{(1-M)(1+3M)} - (1-M)}{2M}} \dots\dots (3)$

= 於てハ $|f'(z)-1| < 1$ 即ち $\Re f'(z) > 0$ シカシ $f'(z)$ ノ正則
性ヲ上式ハ $|z| < \sqrt{\frac{\sqrt{(1-M)(1+3M)} - (1-M)}{2M}}$ ナル凡てノ z = 對

シテ 成立スルカラ, $f(z)$ ハコノ範圍ヲ單葉にアル. ココニ (3)ヲ
満足スル様ニ M ノ範圍ヲ言固ムルニ $M < \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

結局 $M < \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ なる場合ニハ $f(z)$ ハ $|z| < \sqrt{\frac{\sqrt{(1-M)(1+3M)} - (1-M)}{2M}}$
ヲ單葉にアル. 尚 $M \geq \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ なる場合ニハ 明かニ $f(z) = z + Mz^2$
ニヨリ 極限ノ場合カ達セラル.