OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Primäre Integritätsbereiche ニ就テ（Ⅱ） (Krull ノ定理ノ別証)
Author(s)	秋月, 康夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 17, p. none-none
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73885
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

全國紙上数学談話会才17号

48. Primäre Integritätibereiche ニ就テ (II) (Krull 定理ノ別証)

秋月康夫 (三高)

本紙上談話会才14号ニ Krull ノ次ノ定理ノ (ii) ノ部分ノ別証ヲ申シ述ベマシタガソノ際 (1) ノ部分ノオハ私ノ初等的ナ方法デハ証明セラレサウニナイト申シマシタ. 併シソノ後考ヘマシタ所次ノ様ニスルトソレモ簡単ニ証明出来ルト思ヒマス.

Krull ノ定理 [Ein Satz über primäre Integritätsbereiche, Math. Ann. 103] 用ヒ申シマスト、

$\mathfrak{R}$ ノソノ Nullideal ヲ除イテ Doppelkettensatz ノ成立スル Primärintegritätsbereich, $\mathfrak{O}$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ Quotientenkorper K ノ $\mathfrak{R}$ ニ関シテ, algebraisch ganz-abgeschlossener Ring トスレバ, (i) $\mathfrak{O}$ ニ於テハヤハリ (0) ヲ除ケバ Doppelkettensatz ガ成立シ, ソノ Primideale ハ皆テ teilerlos (即チ maximum デアッテ有限個ヨリナイ. (ii) $\mathfrak{R}$ ノ $\mathfrak{p}$-adisch abgeschl. Ring $\mathfrak{R}^*$ ガ nilpotentes Element ヲ有レナイ時ソノ時ノミ $\mathfrak{O}$ ハ endlicher $\mathfrak{R}$-Modul デアルコトガ $\mathfrak{R}$ ニ於ケル (0) 及 $\mathfrak{P}$ ト異ル唯一ツノ Primideal ヲ意味シマス.

以下 (i) ノ部分ノ別証ヲ考ヘテミマス. Krull ト同ジ様ニシテ (loc. cit. S. 45 ヌ) トンダ一ツノ任意ノ Element トスレバ K ノ要素ハ皆テ $\frac{\pi}{p^i}$ ($\pi \in \mathfrak{P}$) ナル形ニ表ケレバ サラニヲ定メルオイテ $\frac{\alpha}{p^i} \in \mathfrak{O}$ ($\alpha \in \mathfrak{R}$) ナル様ナ $\frac{\alpha}{p^i}$ ノ集合ヲ $\mathfrak{O}_c^{(2)}$ トル.

---

(1) Krull ハ上記ノ論文ノ Einleitung デ今ノ所 $\mathfrak{p}$-adische Hilfsmittel ニ依テ非レバ上定理ハ証セラレサウモナイト云イテヰマス. 以下ノ証明ニハ $\mathfrak{p}$-adische Hilfsmittel ハ用ヒラアリマセン.

(2) 前出出文デハコレヲ $\mathfrak{M}_i$ デ示シマシタガ, 今又 Krull ニ従ッテコレヲ $\mathfrak{O}_c$ デ示シマス.

$\frac{\alpha}{p^{b_i}} \in \mathfrak{o}_i$ ナル様ナ $\alpha\,(\in \mathfrak{R})$ ノ集合ヲ $\mathfrak{a}_i$ デ示ス. $(\mathfrak{a}_i$ ハ勿論 $\mathfrak{R}$-Ideal ヲ作ル

然ルトキハ $\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{o}_1 \subseteq \mathfrak{o}_2 \subseteq \cdots \to \mathfrak{o}$

$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{R} \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \cdots$

デアリ, 又明カニ $p\mathfrak{a}_i \equiv 0\ (\mathfrak{a}_{i+1})$ デアル.

而シテアルKデ $p\mathfrak{a}_K = \mathfrak{a}_{K+1}$ ナラバ凡テハ $j \geqq 1$ ニ対シテ

$\mathfrak{a}_{K+j} = p\mathfrak{a}_{K+j-1} = \cdots = p^j \mathfrak{a}_K$ デアル. 何レナラバ $\mathfrak{a}_{K+1} = p\mathfrak{a}_K$, $\mathfrak{o}_{K+1} \subseteq \mathfrak{o}_{K+1}$ 故

$\mathfrak{o}_{K+1}$ ノ任意ノ Element η_{K+2} ヲトルト $\eta_{K+2} = p\eta_K\ (\eta_K \in \mathfrak{o}_K)$ ヨリ,

$\frac{p\eta_K}{p^{K+2}} = \frac{\eta_{K+2}}{p^{K+2}} \in \mathfrak{o}$, ヨリテ $\frac{\eta_K}{p^{K+1}} \in \mathfrak{o}$ ハ $\eta_K \in \mathfrak{o}_{K+1}$ ハ $\mathfrak{o}_{K+2} \equiv 0\ (p\mathfrak{o}_{K+1})$

ヨリテ Induction ノ言ヒ明スレバヨイ.

ヨリノアルトデ $p\mathfrak{o}_K = \mathfrak{o}_{K+1}$ トナルキハ $\mathfrak{o}_K = \mathfrak{o}_{K+1} = \cdots = \mathfrak{o}$ トナリテ $\mathfrak{o}$ $\mathfrak{R}$-Modul トシテ有限デアル. 従ッテ Noether ノ定理 (Abstrakter Aufbau der Idealtheorie, Math. Ann. Bd. 96 §2) ヨリ $\mathfrak{o}$ デハ (1) ガ成立スル.

ソコデ問題トナルノハドノ様ニ大キクトッテモ $p\mathfrak{a}_K = \mathfrak{a}_{K+1}$ トハナラナイ (即チ $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{R} : \mathfrak{o} = (0)$ ナル場合) 或ハ $\mathfrak{R}$ ヨリ $\mathfrak{o}$ ニ到ル Ringkette ガ無限ニ多クノ項ヨリナル時ニモ (1) ガ成立スルカト云フコトデアル。サテ今倍鎖列 ((p) ヲ含ム)

$(p, \mathfrak{a}_1) \supset (p, \mathfrak{a}_2) \supset \cdots$

デ終ル所ヲ $(p, \mathfrak{a}_i) = (p, \mathfrak{a}_{i+1}) = \cdots$ トスル。ソシテ

$$\mathfrak{a}_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{jm_j}, p\mathfrak{a}_{j-1}) \qquad \frac{\alpha_{je}}{p^j} = \omega_{je}$$

スレバ $\mathfrak{o} = \mathfrak{R}[\omega_{11}, \ldots, \omega_{1m_1}; \omega_{21}, \ldots \omega_{2m_2}, \ldots \to \text{無限}]$

アル所デ $\mathfrak{a}_{i+k} \equiv 0\ (p, \mathfrak{a}_{i+k-1})$ ナル故次

$$\alpha_{i+k\,l} = p\rho - \beta_{i+k+1}\ (\text{コヽニ} \rho \in \mathfrak{R},\ \beta_{i+p+r} \in \mathfrak{a}_{i+k+1})$$

$$\therefore \quad \omega_{i+k,\ell} = \frac{\rho}{p^{i+k-1}} + p\frac{\beta_{i+k+1}}{p^{i+k+1}}$$

然ルニ $\omega_{i+k,\ell} \in \mathfrak{O}$ $\frac{\beta_{i+k+1}}{p^{i+k+1}} \in \mathfrak{O}$ ナルヲ以テ $\frac{\rho}{p^{i+k-1}} \in \mathfrak{O}$, 従ッテ $\rho \in \mathfrak{p}_{i+k-1}$

故ニ $$\omega_{i+k,\ell} = \sum_{\mu\nu}^{i+k-1} \xi_{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} + p\omega \quad \text{für } k \geq 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

テアル. コヽニ $\xi_{\mu\nu} \in \mathfrak{R}$, $\omega \in \mathfrak{O}$ デアル. ρ 何ガ $\mathfrak{p}_{i+k}$ キヒ $\mathfrak{p}_{i+k-1}$ デアルカラ 0 キ $\mathfrak{O}_{i+k-1}$ デアル. 上ノ関係式 (1) ヨリ

$$\mathfrak{O} = [\mathfrak{R}, \omega_{11}, \ldots, \omega_{1m_1}; \ldots; \omega_{i-1,1}, \ldots, \omega_{i-1,m_{i-1}}, \mathfrak{f}\mathfrak{O}] \quad \cdots (2)$$

ガ成立スル. サテ Restklassenring $\mathfrak{O}/\mathfrak{f}\mathfrak{O}$ ハ $\mathfrak{R}/\mathfrak{f}$ = isomorph ナ体 L ヲ含ムガ (2) ヨリ $\mathfrak{O}/\mathfrak{f}\mathfrak{O}$ ハ L-Modul トシテ有限ナルコトヲ知ル.

次ニ Modulsumme $\mathfrak{R} + \mathfrak{f}\mathfrak{O} = \overline{\mathfrak{R}}$ ヲトルト $\overline{\mathfrak{R}}$ ハ明カニ Ring ヲ作ル而シテ $\overline{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f}\mathfrak{O}$ ハ $\overline{\mathfrak{R}}$ ニ於テ teilerlos 従ッテ Primideal デアル. ($\because [\mathfrak{R}, \overline{\mathfrak{f}}] = \mathfrak{f}$ 故 $\overline{\mathfrak{R}}/\mathfrak{f} \cong \mathfrak{R}/\mathfrak{f} \cong L$.).

$\overline{\mathfrak{a}}$ ヲ一ツノ $\overline{\mathfrak{R}}$-Ideal トスレバ $[\overline{\mathfrak{a}}, \mathfrak{R}] = \mathfrak{a} \neq 0$ デアル. $\because \alpha \in \overline{\mathfrak{a}}$ ($\alpha \neq 0$) トスレバ $\alpha = \frac{\alpha_R}{p^R}$, $\alpha_R \in \mathfrak{R}$ 故ニ $p^R\alpha \in \mathfrak{R}$ 且ツ $\in \overline{\mathfrak{a}}$. $\therefore \mathfrak{a} \neq 0$

而シテ $\overline{\mathfrak{a}} = \overline{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{R}} = \overline{\mathfrak{a}}(\mathfrak{R} + \mathfrak{f}\mathfrak{O}) = \overline{\mathfrak{a}} + \overline{\mathfrak{a}}\mathfrak{f}\mathfrak{O}$ 従ッテ $\overline{\mathfrak{a}}\mathfrak{f}\mathfrak{O} \equiv 0$ ($\overline{\mathfrak{a}}$) ナルコト及ビ $\mathfrak{f}^m \equiv 0$ ($\mathfrak{o}$) 従ッテ $(\mathfrak{f}\mathfrak{O})^{m+1} \equiv 0$ $\mathfrak{a}\mathfrak{f}\mathfrak{O} \equiv 0$ ($\overline{\mathfrak{a}}\mathfrak{f}\mathfrak{O}$) ナルコトヨリ

$$(\mathfrak{f}\mathfrak{O})^{m+1} = \overline{\mathfrak{f}}^{m+1} \equiv 0 \quad (\overline{\mathfrak{a}})$$

実故 $\overline{\mathfrak{R}}$, (0) ト異ル Ideal ハ凡テ $\mathfrak{f}$ ノ或ル冪ヲ含ム. ソノ結果 0 ト異ル $\overline{\mathfrak{R}}$-Ideal ハ凡テ $\mathfrak{f}$ ヲ含マレテオナケレバナラヌ.

次ニ $\overline{\mathfrak{R}}$ デ (0) ヲ除イテ両鎖律ノ成立スルコトヲ証ス. コレガ証セラレルト上ノコトヨリ $\overline{\mathfrak{R}}$ ノ凡テノ Ideale ((0) ト $\overline{\mathfrak{R}}$ ヲ除ク) ハ $\mathfrak{f} = \mathfrak{P}$ スル Primärideal ナルコト即チ $\overline{\mathfrak{R}}$ ハ又両鎖律ヲ許ス Primärintegritätsbereich ナルコトヲ知ル.

証明:— $\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ一ツノ Ideal トシ $\mathfrak{a}\mathfrak{O}$ ト $\mathfrak{f}=\mathfrak{g}\mathfrak{O}$ トノ間ニ $\overline{\mathfrak{R}}$-Ideale ノ組成列ノ存在スルコトヲ証シヨウ. $\mathfrak{a}'$ ヲ $\mathfrak{a}$ ノ $\mathfrak{R}$ ニ於ケル unmittelbarer Teiler トスレバ $\mathfrak{a}'=(\beta,\mathfrak{a})$ ナルコト及 $\mathfrak{a}'\mathfrak{O}/\mathfrak{a}\mathfrak{O}$ ハ $\overline{\mathfrak{R}}/\mathfrak{f}\cong\mathfrak{R}/\mathfrak{g}\cong\Delta$ ニ関シテ operatorisomorph + Minimalideale ノ直和ナルコト尚 $\mathfrak{O}/\mathfrak{g}\mathfrak{O}$ ガ Δ-Modul トシテ有限ナルコトヨリ $\mathfrak{a}'\mathfrak{O}/\mathfrak{a}\mathfrak{O}$ ノ Direkte Summanden ノ Anzahl ハ有限デアルコトガ云ヘル. ヨリテ $\mathfrak{a}\mathfrak{O}$ ヨリ $\mathfrak{a}'\mathfrak{O}$ ニ到ル Idealkette ハ有限項ヨリナル.

サテ $\mathfrak{a}$ ヨリ $\mathfrak{g}$ ニ到ル $\mathfrak{R}$-Ideal ノ組成列ガ存在スルカラ $\mathfrak{a}\mathfrak{O}$ ヨリ $\mathfrak{p}\mathfrak{O}=\mathfrak{f}$ ニ至ル $\overline{\mathfrak{R}}$-Ideale ノ組成列ガ存在スル.

次ニ $\overline{\mathfrak{a}}$ ヲ任意ノ $\overline{\mathfrak{R}}$-Ideal トスレバ既述ノ通リ $\mathfrak{o}\mathfrak{g}\mathfrak{O}\equiv 0\ (\overline{\mathfrak{a}})$ ヲアル. 今 $\mathfrak{o}\mathfrak{g}=\mathfrak{a}$ トトルト上ノ証明ニヨリ $\mathfrak{g}\mathfrak{O}$ ヨリ $\mathfrak{a}\mathfrak{O}$ ニ到ル組成列

$$\mathfrak{f}\supset\overline{\mathfrak{a}}_1\supset\overline{\mathfrak{a}}_2\supset\cdots\supset\overline{\mathfrak{a}}_m=\mathfrak{a}\mathfrak{O}.$$

ガ存在スル. サテ $\overline{\mathfrak{a}}$ ヲ最終項トスル組成列ノ有在ハ

$$\overline{\mathfrak{f}}=(\mathfrak{f},\overline{\mathfrak{a}})\supset(\overline{\mathfrak{a}}_1,\overline{\mathfrak{a}})\supset(\overline{\mathfrak{a}}_2,\overline{\mathfrak{a}})\supset\cdots\supset(\overline{\mathfrak{a}}_m,\overline{\mathfrak{a}})=(\mathfrak{a}\mathfrak{O},\overline{\mathfrak{a}})=\overline{\mathfrak{a}}$$

ヲトレバヨイ. カクテ $\overline{\mathfrak{R}}$ ニ於イテ両鎖律ハ成立スル(Noether, loc. cit. 最後ノ[9]参照)(コノ部分証了)

以上デ $\overline{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}+\mathfrak{g}\mathfrak{O}$ ハ両鎖律ヲ許ス Primärintegritätsbereich ナルコト知ッタ. 所デ $\mathfrak{f}=\mathfrak{g}\mathfrak{O}$ ハ $\mathfrak{O}$-Ideal デアルカラ $\overline{\mathfrak{R}}$, $\mathfrak{O}=\mathfrak{f}\neq(0)$ デアル. 従ッテ前拙文(14号)定理2ニヨリ $\mathfrak{O}$ ハ $\overline{\mathfrak{R}}$-Modul トシテ endlich デアル. 従ッテ $\mathfrak{O}$ ニ於テモ Doppelkettensatz ハ成立スル. 又 $\mathfrak{O}/\mathfrak{g}\mathfrak{O}$ ハ Primäre Ringe ノ直和トシテ分解セラレルトシテモ(2)ヨリ分ル通リ有限個ノモノガ直和ニシカ分解セラレナイ様ニヨッテ $\mathfrak{p}\mathfrak{O}$ ノ $\mathfrak{O}$ ニ於ケル Primideale 有限個

デアル. 而レシコレラ等以外ニ Primideale 存在レナイコトモ容易ニ知ラレル. ヨリテ Krull ノ定理ハ以上デ証明セラレタ.

尚 $\mathfrak{R}$ ヨリ σ ニ到ル Ringkette ニ於テ $\mathfrak{R}\{w_{11},\cdots,w_{1m_1};\cdots;w_{i-1,1},\cdots,w_{i-1,m_i}\}$ ニヨリテ erzeugen サレル環 γ ヲ至ハモノシ考ヘル. コノ γ ハ又両鎖律ヲ許ス. 何トナレバ w_{ji} ハ $\mathfrak{R}$ ニ対シテ代数的整デアルコトヨリ γ, $\mathfrak{R}$-Modul トシテ有限デアルカラデアル. 今ニノ γ ニ於ケル Primideal ノ一ハ $\mathfrak{P}_j$ トスレバ $\sigma=\gamma+\mathfrak{P}_j\sigma$ トナルコトヲ容易ニ知ル. 即チ γ ヲ含ム様ナ下環ガ某カ一ツトレバ ソレノ σ ニ関スル Führer ハ必ズ Null デナケレバナラヌ[1] カ、ルコトガ果シテ存在シ得ルカドウカ即チ両鎖律ガ成立スル Primärer integritätsbereich $\mathfrak{R}$ デ $\mathfrak{R}\,\sigma=(0)$ ナルコト, Existenzbeweis ニツイテハ今ノ所私ニハヨク分リマセン. コノ Krull ノ定理ハ両鎖律(勿論(0)ヲ除ク)ヲ有スル抽象環ト有限次代数的数体ノ環トヲ結ビツケバ重要ナ定理デアリマスカラ上ノ Existenzproblem モ何トカ処理レナケレバナラズ問題ト思ヒマス.

ツイデニ14号ニノヤマレタモノノ説明ノ補足ト正誤ヲ付シテオキマス.

(i) 同ジ書キマレタガ, コレハ環 $\mathfrak{R}$ ニオケル普通ノ Quottentideale ヲ意味シマス. $\mathfrak{P}:\mathfrak{p}=\mathfrak{p}'$ トカイタ所ハ前文ニテ述ベタ通リ Quotientenring ハ $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, Operatorenbereich デス.

(ii) 定理5デ $\mathfrak{J}'=\mathfrak{R}'$ ナル件ノ書キマシタガコノ $\mathfrak{R}'$ ハ前定理ト用ヒル条件ヲ充スモノダカラ, 即チ $\mathfrak{R}'$ ガ $\mathfrak{R}$-Modul トシテ einfach ナル件ト書クベキデス.

(iii) 正誤:一番下ノ頁ノ後ノ行デ 前仮定カントアルハ 前定理カラノ誤リ.

(iv) 定理6ノ証明ニ当ッテ此ノ $\mathfrak{R}$ ナル件ニハ不確カナコトノ書キマシタガソノ件ヲ定理ハ成立シマス.

出番:東北数学雑誌, 37巻 定理2, 3参照