



Title	函数ノ单葉性ニ就テ
Author(s)	能代, 清
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 18, p. 1-6
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73888
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

全国紙上数学談話会 第18号

51. 函数、單葉性 = 就テ

熊代 三青 (北大)

本会誌 第12号, 35 = 31 + 續イテ 解析函数、單葉性 = 就テ述ベテ
見タイ。前 = D = "正則 + 函数 $f(z)$ が 相異 + " $p+1$ コノ 異 $z_1, z_2,$
デ" 同シ" 値ヲトル + ラハ", 凡テノ 異 z_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, p+1$) ヲ 内部 = 含メ 單純 +
閉正則曲線ヲ C トシテ

$$\int_C \frac{f(z) dz}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{p+1})} = 0$$

トコトヨリ 複葉性 = 関スル 市原氏ノ 定理ノ 簡單 + 証明ヲ 述ベテ。次 =
氏ノ 定理ヲ 少シク 変形シテ ミヨウ。

巾級数 $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_p z^p + \dots$

ト 因時 = $\Phi(\gamma) = |a_0| + |a_1| \gamma + |a_2| \gamma^2 + \dots + |a_p| \gamma^p + \dots$

ヲ 考ヘル。 ($\Phi(\gamma) = f(z)$ ノ 優級数ト 呼ビ" $\Phi = \rho(f)$ ヲ" 表ハス)

簡單 + 計算ヲ" $\frac{\Phi^{(p)}(\gamma)}{p!} = |a_p| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{p+n}| \binom{p+n}{n} \gamma^n$ + コトヨリ

$\frac{\Phi^{(p)}(\gamma)}{p!} - |a_p| < |a_p|$ + ラハ" $f(z)$ ハ $|z| < \gamma$ ヲ" 正則且 $|z| < \gamma$ ヲ" 高

p -葉トナル。更ニ $\frac{\Phi^{(p)}(\gamma)}{p!} - |a_p|$ カ" $\frac{f^{(p)}(z)}{p!} - a_p$ ノ 優級数ヲ" ア

ルコト = 注意スルハ" 結局氏ノ 定理ハ 次ノ 様ニ 述ベラレル。

定理 A (市原氏) $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p + \dots$ カ"
 $\rho\left(\frac{f^{(p)}(z)}{p!} - a_p\right) < |a_p|$

+ ラハ", $f(z)$ ハ $|z| < \gamma$ ヲ" 正則且 高々 p -葉ヲ" アル。

ソコヲ" $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{f^{(p)}(z)}{p!} - a_p \right) = \frac{\Phi^{(p)}(r)}{p!} - |a_p|$ 7 "置キ換ヘタ
 場合ニコノ定理ハ成立スルヲ"アラウカ。之ヲシテ"之ハ"

予想想 A. $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_p z^p + \dots$ 7 $|z| < r$
 正則且ココヲ"

$$\left| \frac{f^{(p)}(z)}{p!} - a_p \right| < |a_p|$$

ナラハツ $|z| < r$ 7 "高々 p -葉テ"アル。

之ヲ様々定理ハ得ラルイヲ"アラウカ。 $p=1$ ノ場合ニハ正確カ=成
 立スル。ソレハ前リ=述ベタ

定理 B. $f(z)$ シ 凸 形 領域 D 7 "正則ヲ"且ココヲ"

$$\Re(e^{i\alpha} f(z)) > 0 \quad (\alpha \text{ ハ 或ル実数})$$

ナラハツ $f(z)$ ハ D 7 "單葉デアレ。

ト云フ定理ノ直接ノ結果ヲ"アル。ココヲ"定理 Bノ簡單ノ証明ヲ紹介シ
 勿論 $\alpha=0$ ノ片ニ証明スレハ"十分ヲ"アル。

假ニ $f(a) = f(b) = A$ トスル。之ヲ"線分 $\overline{ab}$ ハ D 7 属スル。明ニ線
 $\overline{ab}$ 上ノ某ハ $z = a + (b-a)t$, $0 \leq t \leq 1$ ト表ハサレレ。

$$\text{今} \quad \Phi(t) = \frac{f(a + (b-a)t)}{(b-a)} = u(t) + i v(t)$$

$$\text{ト云ケハ} \quad \Phi(0) = \frac{f(a)}{b-a} = \frac{A}{b-a}, \quad \Phi(1) = \frac{f(b)}{b-a} = \frac{A}{b-a}$$

故ニ $\Phi(0) = \Phi(1)$ 従ツテ $u(0) = u(1)$ 。

然ルニ $u(t)$ ハ 明ニ $0 < t < 1$ 7 "微分可能ヲ"アルカ、Rolleノ定理ニ
 $u'(0) = 0$, $0 < \theta < 1$ 又

$$\Phi'(t) = \frac{f'(a + (b-a)t)}{b-a} (b-a) = f'(a + (b-a)t) = u'(t) + i v'(t)$$

$$\text{デアレカ} \quad \Re f'(a + (b-a)\theta) = u'(\theta) = 0$$

之ハ假定=反スル。

斯クシテ我々ノ予想ハ $\rho=1$ ノ場合ニハ正シイコトガワカル。一般ノ場合ハ未ダ未解決ヲアル。言語氏ノ御教示ヲ得タイト思フ。

言語ハ少し脱線スレカ、 $f(z)$ カノ系分 ρ 含有4個負土域ニ正則ナルトキ、モシ $f(a)=f(b)$ ナラハ系分 ρ 上ノ少クとも一ツノ内ニ $Rf(z)$ 同木葉 $= Jf'(z)=0$ トナル。 $Rf'(z)$ カノ 0 =ナルト $Jf'(z)=0$ トナルトキカノタマニ至スレハソコニ $f'=0$ トナル事アル。又複素函数ニ於テハ Rolleノ定理ガ成立スルカナイ。領域 D 内ニ $f(z)$ カノ正則ナルトキ、相異ナルニ異テ"同"ニ値ヲトツタカラトモツテ D =カキテ $f'(z)$ カノ 0 =ニ至ラズモツトハ限ラナイ。コノコトハ z ヲ考ヘテモワカル。處ガ陳建功氏ハ「 $f(z)=z+\dots$ カノ $|z|<R$ 内ニ正則且ツソコニ $f'(z) \neq 0$ ノ上ニ $|\frac{f(z)}{z}-1|<1$ トスレハ $f(z)$ ハ $|z|<R$ 内ニ單葉ナルアル」トシテ結果大學士院記事 IX (1933), p. 465-467 テニ發表サレテアル。之ヲ少し變形スレハ $f(z)=z+\dots$ カノ $|z|<R$ 内ニ正則ナル且 $|\frac{f(z)}{z}-1|<1$ トスル。コノ片モ相異ナルニ異テ"同"ニ値ヲトツタスレハ、 $f'(z)$ ハ $|z|<R$ 内ニ必ス 0 =ニ至ラズモツ。

ト云フコト=ナル。陳建功氏ノ此結果ハ大變面白いと思ヒ、自分ニ證明ヲ試ミテミタカ成エカナイ。後、ホ、陳氏ノ土室ニ論文ニハ証明が見出タイ木葉=思フ。之ヲ言語氏ノ御教示ヲ得タイト思フ。

$z^2 f'(z) + 1 < 1$ トスレバ " $f(z)$ は $|z| < R$ テ" 單葉 テ" アル。

証明。 $G(z) = f(z) - \frac{1}{z}$ トケハ、 $G(z)$ は $|z| < R$ テ" 正則 テ" アル
 今 $\neq 0$ 十レ 相異 十レ 二 点 z_1, z_2 トシ、 z_1 ト z_2 トシ 内部 = 含ム 圓
 $\checkmark$ 円 $C: |z| = \rho$ テ 画ケハ " z_1, z_2 ヲ 包ム" 系 分ルハ C 内 = 在ル。 又
 = 於ケル $|G'(z)|$ テ 周ベルト

$$|G'(z)| = \left| f' + \frac{1}{z^2} \right| = \left| \frac{z^2 f' + 1}{z^2} \right| < \frac{1}{\rho^2}$$

正則 函数ハ Minimum ヲ 有ル 界 テ" トル

$$\begin{aligned} \text{故テ } f(z_2) - f(z_1) &= \left[\frac{1}{z_2} + G(z_2) \right] - \left[\frac{1}{z_1} + G(z_1) \right] = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} + [G(z_2) - G(z_1)] \\ &= \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} + \int_{z_1}^{z_2} G'(z) dz \end{aligned}$$

積分 路 = z_1 ト z_2 ト 包ム "系 分ルヲ トルハ"

$$\begin{aligned} |f(z_2) - f(z_1)| &\geq \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} \right| - \left| \int_{z_1}^{z_2} G'(z) dz \right| > \frac{|z_1 - z_2|}{\rho^2} - \int_0^{|z_1 - z_2|} |G'(z)| |dz| \\ &> \frac{|z_1 - z_2|}{\rho^2} - \int_0^{|z_1 - z_2|} \frac{|dz|}{\rho^2} = \frac{|z_1 - z_2|}{\rho^2} - \frac{|z_1 - z_2|}{\rho^2} = 0 \end{aligned}$$

注意. 定理 B'ハ 定理 B' 系 テ" アル。

$f(z) = z + \dots$ カ " $|z| < R$ テ" 正則 且 ココ テ" $|f'(z) - 1|$ トラハ

$f(z)$ は $|z| < R$ テ" 單葉 テ" アル

トモ テ 定理 = 相当 スルモ、 テ" アル。

次 = 定理 B' - 応用 テ 述ベル。 $f(z) = z + \dots$ テ $|z| < R$ テ" meromorphic 且 $0 < |z| < R$ テ" $f(z) \neq 0$ トスル。 コノキ $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \dots$ ハ $0 < |z| < R$ テ" 正則 トアル。 今 $z^2 g'(z) + 1 = 1 - z^2 \frac{f'(z)}{f(z)^2} \Rightarrow$
 $\left| z^2 \frac{f'(z)}{f(z)^2} - 1 \right| < 1 \quad (|z| < R)$

ナリ条件ヲ与フルハ" 前定理ニ依リテ $f(z)$ ハ $|z| < R$ テ" 單葉ヲ"アル
從ツテ次ノ定理ガ得ラル。

定理 C'. $f(z) = z + \dots$ ヲ $|z| < R$ テ" meromorphic 且" $0 < |z| < R$ テ" $f(z) \neq 0$ トスル。コノトキ

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{f(z)^2} - 1 \right| < 1 \quad (|z| < R)$$

トシバ $f(z)$ ハ $|z| < R$ テ" 單葉ヲ"アル。

注意 $f(z) = z + \dots$ ヲ $|z| < R$ テ" holomorphic 且
 $0 < |z| < R$ テ" $f(z) \neq 0$ トスル。コノトキ

$$\Re\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right) > 0 \quad \text{又ハ} \quad \left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1$$

トシバ $f(z)$ ハ $|z| < R$ テ" 單葉 (實ハ星型) ヲ"アル。

ト云フヨリ矢口ラレタ定理ニ相当スルモノヲ"アル。
(11. 4)