



Title	單葉函數二就テ
Author(s)	尾崎, 繁雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 19, p. a-none
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73894
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

57. 單葉函数 = 京大

久

尾崎 繁雄 (東京文理大)

D を有限な単一範囲, γ を D の境界を表はす正則曲線とする. 今 z が γ 上を一周する場合, $\frac{1}{2}$ の回を曲線 γ にトシシカモ γ の内を範囲 D として仮定する. この場合 γ の内を範囲 D のハ必ずしも γ 上の限りの言ひでアルが便宜上 D を反転凸範囲と呼ぶことは出来る. シカレトキハ,

定理 A. $w = f(z)$ が反転凸範囲 D 内では有理型, 且 γ 上

$$\Re [e^{i\alpha} z^2 f'(z)] > 0 \quad (\alpha: \text{一定実数}) \quad (1)$$

ならば $f(z)$ は D 内では單葉である. (尚 γ 上の原像は当然 D 内を含むシカモ一次ノ極限トナル)

言証明. $\text{Amp.} \frac{dw}{z^2} = \pi + \text{amp.} d\frac{1}{z}$ ナルコト = 注意スルハ (1) より

$$\frac{\pi}{2} < \alpha + \text{amp.} dw - \pi - \text{amp.} d\frac{1}{z} \leq \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

シカル = D は反転凸範囲であるから, D = 含むシカモ D の境界 = 十分接近シテ曲線 γ 上を一周シ γ の内を範囲 D' が又反転凸範囲である様 = 正則曲線 γ 上を一周シ γ の内を範囲 D としてアル. z が γ 上を正方向 = 一周スルハ $\frac{1}{2}$ の回を曲線 γ に凸範囲 D としてアルカラ

$$\beta \leq \text{amp.} d\frac{1}{z} \leq \beta + 2\pi \quad (3)$$

結局 (2), (3) より

$$\beta - \alpha + \frac{\pi}{2} < \text{amp.} dw \leq \beta - \alpha + \frac{3\pi}{2} \quad (4)$$

$f(z)$ = 有り描字カレル D' の像 γ 上ノ境界 γ 上スルハ, (4) = 有り γ 上 = 於テ $\text{amp.} dw$ の振幅が 3π より小ナルアル. 故ニ = 掛谷先生ノ補助定理 (正則曲線 γ を境界トスル単一範囲 T = 於テ, γ 上 = 於テ $\text{amp.} dw$ の振幅が 3π より小ナルトキハ T は單葉である (拙論大塚数学会誌 三巻第一号 18 頁参照) を用ヒテ, T が單葉であるコトがワカル. 従ツテ

$f(z)$ は D' 上即ち D 内を"単葉"アル。

尚且この定理を掛谷先生ノ流儀ニテラツテ幾分拡張アルアルカ"記述"が繁雑ニテルカラ省略スル(前記拙論参照)

コノ定理ノ明カニ能代氏ノノット対ニテ"アルカ"能代氏ノ定理ノ次ノ様ニテベク方カ"幾分一般化"アル。

定理 A'. $w = \varphi(z)$ カ"凸範圍 D 内を"有理型"アル且ココヲ"
 $\Re[e^{i\alpha}\varphi'(z)] > 0$ (α : 一定実数)

ナラバ" $\varphi(z)$ は D 内を"正則"且"單葉"アル。

証明. $\Re[e^{i\alpha}\varphi'(z)] > 0$ ナルコトヨリ $\varphi(z)$ 内ニ於ケル正則性カ"表ハレル。($\varphi(z)$ カ D 内ニ極限 z_0 ヲモツトスレバ, z_0 ノ近傍ノ z ハ φ' ニ面ニテ" ∞ ノ近傍ニ至ル $|\varphi'(z)| > M$ — ココニ M ハ充分大ナル"常数" — アウツックス。從ツテ例ヘバ" $\Re[e^{i\alpha}\varphi'(z)] < 0$ ナル様ニ z カ" z_0 ノ近傍ニ存在スルコト事ニテ"假定ト矛盾スル)

從ツテ $\varphi(z)$ 亦 D 内を"正則"トツテ, 能代氏ノ定理ヲ応用シテ上ノ結果ヲ得ル。

系. $f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$
 カ" $|z| < R$ 内を"有理型"且"單葉"アル

$$\Re[e^{i\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)^2}] > 0 \quad (\alpha: \text{一定実数})$$

ナラバ" $f(z)$ は $|z| < R$ 内を"單葉"アル。

証明. 定理 A' = 於テ $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ トツテハ"容易"ニイフコトアル。

已ニ知ラレタル結果ト合セテ"ノ様ニテ"ハルコトカ"アル。

定理 B. $f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$
 カ" $|z| < R$ 内ニ於ケル"有理型"函数トスル。

系. $\varphi(z) = z + a_2 z^2 + \dots$
 カ" $|z| < R$ 内を"有理型"且"單葉"アル

$$\Re[e^{i\alpha} \frac{z^2 \varphi'(z)}{\varphi(z)^2}] > 0 \quad (\alpha: \text{一定実数})$$

ナラバ" $\varphi(z)$ は $|z| < R$ 内を"單葉"アル。

証明. 定理 A' = 於テ $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ トツテハ"容易"ニイフコトアル。

定理 B'. $\varphi(z) = z + a_2 z^2 + \dots$
 カ" $|z| < R$ 内ニ於ケル"有理型"函数トスル。

α 一定実数トスルトキ $|z| < R$ 十レ凡テ z
 = 対シテ n 次ノ三條件ノ何レカ一ツカ"満
 足サレハ" $f(z)$ ハ $|z| < R$ テ"單葉"ナル。

$$(i) \operatorname{Re}[e^{i\alpha} z^2 f'(z)] > 0$$

$$(ii) \operatorname{Re}[e^{i\alpha} \frac{z f'(z)}{f(z)}] > 0$$

$$(iii) \operatorname{Re}[e^{i\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)^2}] > 0$$

α 一定実数トスルトキ $|z| < R$ 十レ凡テ
 = 対シテ n 次ノ三條件ノ何レカ一ツカ"満
 足サレハ" $\phi(z)$ ハ $|z| < R$ テ"單葉"ナル。

$$(i) \operatorname{Re}[e^{i\alpha} \phi'(z)] > 0$$

$$(ii) \operatorname{Re}[e^{i\alpha} \frac{z \phi'(z)}{\phi(z)}] > 0$$

$$(iii) \operatorname{Re}[e^{i\alpha} \frac{z^2 \phi'(z)}{\phi(z)^2}] > 0$$

特ニ (i), (ii) ノ特異合ニハ $\phi(z)$ ハ $|z| < R$
 正則トナル

[注意] 定理 A 及ニ "A'" ガ 夫々 已ニ 知ラレタル次ノ結果ノ拡張ヲ
 コトハ 明テ"ナル。

$$f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

カ" $1 \geq |a_1|R^2 + 2|a_2|R^3 + \dots + n|a_n|R^n + \dots$
 7 満足スレハ" $f(z)$ ハ $0 < |z| < R$
 テ"正則且單葉"ナル。

$$\phi(z) = z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots$$

カ" $1 \geq 2|b_2|R + \dots + n|b_n|R^{n-1} + \dots$
 7 満足スレハ" $\phi(z)$ ハ $|z| < R$ テ"正則
 單葉(星型)ナル。

最後ニ 前号ニ 於ケル 能代氏ノ 定理 B' 及ニ "C'" ハ 何レモ 上記
 定理 A 及 系ニ 含マレルコトヲ 附記シマス。

5.3 函数ノ 多葉性ニ 就テ IIノ 補遺

コ"ク 大ザツハ"ナ 計算ヲ スレハ"次ノ 結果ヲ 得ル

$$\text{定理 } g(z) = z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \dots + b_n z^n + \dots$$

7 $|z| < 1$ = 於ケル 正則 長葉 函数トスレハ"

$$|b_n| < \left(\frac{en}{k}\right)^{2k}$$

$$\frac{1}{2} \text{ 証明. } G(z) = \sqrt[k]{g(z)} = z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots, \quad |z| < 1$$

= 於ケル 正則 單葉 函数トナル。從テ 正ニ 定王里ヨリ

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |G(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \quad \left\{ \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \right\}^k \leq |g(z)| \leq \left\{ \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \right\}^k$$

從テ ニ --, 係數

$$|b_n| \leq \frac{1}{r^k} = \frac{1}{\left(1 + \frac{2k}{n+k}\right)^{2k} \left(\frac{n+k}{2k}\right)^{2k}} < \left(\frac{en}{k}\right)^{2k}$$