OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	單葉函數ニ就テ
Author(s)	尾崎, 繁雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 19, p. a-none
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73894
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

57. 単葉函数について

尾崎輝雄（東京文理大）

D を有限な単一範囲，C を D の境界を表わす正則曲線とする。今 z が C 上を一周する場合に，$\frac{1}{z}$ の画く曲線を Γ とし，この Γ の囲む範囲を凸と仮定する。この場合に C の囲む範囲 D は必ずしも凸とは限らないが訳で，便宜上 D を反転凸範囲と呼ぶことにする。さて，

定理A. $w=f(z)$ が反転凸範囲 D 内で有理型，且つ

$$R[e^{i\alpha}z^2 f(z)]>0 \quad (\alpha: \text{一定実数}) \tag{1}$$

ならば $f(z)$ は D 内で単葉である。（尚この不等号は当然 D 内に含まれるかも一次の極を除く）

証明. $\mathrm{Amp}.\frac{dz}{z^2}=\pi+\mathrm{amp}.d\frac{1}{z}$ なることに注意すれば (1) より

$$\frac{\pi}{2}<\alpha+\mathrm{amp}\,dw-\pi-\mathrm{amp}\,d\frac{1}{z}\leqq\frac{\pi}{2} \tag{2}$$

さて D は反転凸範囲であるから，D に含まれるかも D の境界に十分接近して曲線 C を画く C の囲む範囲 D' が又反転凸範囲である様に正則曲線を選ぶことができる。z が C 上を正方向に一周すれば $\frac{1}{z}$ の画く曲線 Γ は凸範囲を囲むのであるから

$$\beta\leqq\mathrm{amp}.d\frac{1}{z}\leqq\beta+2\pi \tag{3}$$

結局 (2), (3) より

$$\beta-\alpha+\frac{\pi}{2}<\mathrm{amp}\,dw\leqq\beta-\alpha+\frac{3\pi}{2} \tag{4}$$

$f(z)$ により描写された D の像を T，その境界を K とすれば，(4) により K 上に於ける $\mathrm{amp}\,dw$ の振幅が 3π より小さいのである。吉文に掛谷先生の補助定理（正則曲線 K を境界とする単一範囲 T に於て，K 上に於ける $\mathrm{amp}\,dw$ の振幅が 3π より小さければ T は単葉である（数学雑誌 大塚数学会誌 第三巻第一号 18頁参照）を用いて，T が単葉であることがわかる。従って

$f(z)$ ハ D' 上即チ D 内デ"単葉デアル。

尚此定理ヲ掛谷先生ノ流儀ニナラッテ幾分拡張デキルノデアルガ記述ガ繁雑ニナルカラ省略スル（前記拙論参照）

コノ定理ハ明カニ能代氏ノソレト対ニナルモノデアルガ"能ク代氏ノ定理ハ次ノ様ニ述ベタ方ガ幾分一般的デアル。

定理A'. $w=\varphi(z)$ ガ"凸範囲 D 内デ"有理型デ"且ツコノデ"

$$R[e^{i\alpha}\varphi'(z)]>0 \quad (\alpha:\text{一定実数})$$

ナラバ $\varphi(z)$ ハ D 内デ"正則且単葉デアル。

証明。$R[e^{i\alpha}\varphi'(z)]>0$ ナルコトヨリ $\varphi(z)$ ノ D 内ニ於ケル正則性ガ"表ハレル。（∵ $\varphi(z)$ ガ D 内ニ極点 Z_0 ヲモッタトスレバ，Z_0 ノ近傍ノ Z ハ φ' ニ面上デハ ∞ ノ近傍ヲ取ッテ $|\varphi(z)|>M$ ——ココニ M ハ充分大ナル常数ヲ——アウツボメックス。従ッテ例ヘバ $R[e^{i\alpha}\varphi'(z)]<0$ ナル様ナ Z ガ Z_0 ノ近傍ニ存在スルコト事ニナリ仮定ト矛盾スル）

従ッテ $\varphi(z)$ モ亦 D 内デ"正則トナリ，能代氏ノ定理ヲ応用シテ上ノ結果ヲ得ル。

系。$f(z)=\frac{1}{z}+a_0+a_1z+\cdots\cdots$

ガ"$|z|<R$ デ"有理型且ツコノデ"

$$R[e^{i\alpha}\frac{f(z)}{f(z)^2}]>0 \quad (\alpha:\text{一定実数})$$

ナラバ $f(z)$ ハ $|z|<R$ デ"単葉デアル。

証明。定理A'ニ於テ $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$ トオケバ容易ニ云ヒ得ラレル。

系。$\varphi(z)=z+b_2z^2+\cdots\cdots$

ガ"$|z|<R$ デ"有理型且ツコノデ"

$$R[e^{i\alpha}\frac{z^2\varphi'(z)}{\varphi(z)^2}]>0 \quad (\alpha:\text{一定定数})$$

ナラバ $\varphi(z)$ ハ $|z|<R$ デ"単葉デアル。

証明。定理Aニ於テ $f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$ トオケバ容易ニ得ラレル。

已ニ知ラレテヰル結果ト合セテ次ノ様ニ述ベルコトガデキル。

定理B. $f(z)=\frac{1}{z}+a_0+a_1z+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<R$ ニ於ケル有理型函数トスル。

定理B' $\varphi(z)=z+b_2z^2+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<R$ ニ於ケル有理型函数トスル。

αを一定実数とするとき |z|<R なる凡ての z に対して次の三条件の何れかが満足されるならば f(z) は |z|<R で単葉である。

(i) $R[e^{i\alpha} z^2 f(z)] > 0$

(ii) $R\left[e^{i\alpha} \frac{z f'(z)}{f(z)}\right] > 0$

(iii) $R\left[e^{i\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)^2}\right] > 0$

αを一定実数とするとき |z|<R なる凡ての z に対して次の三条件の何れかが満足されるならば φ(z) は |z|<R で単葉である。

(i) $R[e^{i\alpha} \varphi'(z)] > 0$

(ii) $R\left[e^{i\alpha} \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right] > 0$

(iii) $R\left[e^{i\alpha} \frac{z^2\varphi'(z)}{\varphi(z)^2}\right] > 0$

特に (i), (ii) の場合には φ(z) は |z|< 正則となる

〔注意〕 定理A及びA′が夫々已に知られた次の結果の拡張であることは明である。

$$f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots$$

が $1 \geq |a_1| R^2 + 2|a_2| R^3 + \cdots + n|a_n| R^{n+1} + \cdots$ を満足するならば f(z) は $0<|z|<R$ で正則且単葉である。

$$f(z) = z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n + \cdots$$

が $1 \geq 2|b_2| R + \cdots + n|b_n| R^{n-1} + \cdots$ を満足するならば φ(z) は |z|<R で正則単葉（星型）である。

最後に前号に於ける能代氏の定理B′及びC′は何れも上記定理A及系に含まれることを附記しておく。

§3 函数の多葉性に就ての二の補遺

コーク大学のパイ計算のストレバンの次の結果を得た

定理 $g(z) = z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \cdots + b_n z^n + \cdots$

が |z|<1 に於ける正則 k 葉函数ならば

$$|b_n| < \left(\frac{en}{k}\right)^{2k}$$

を証明する。 $G(z) = \sqrt[k]{g(z)} = z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$ は |z|<1 に於ける正則単葉函数である。従て歪みの定理により

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |G(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \quad \left\{\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\right\}^k \leq |g(z)| \leq \left\{\frac{|z|}{(1-|z|)^2}\right\}^k$$

従てコーシーの係数

$$|b_n| \leq \frac{1}{r^{n+k}} = \frac{1}{\left(\frac{n-k}{n+k}\right)^{n+k}} = \left\{\left(1+\frac{2k}{n-k}\right)^{\frac{n-k}{2k}}\right\}^{2k} \left(\frac{n+k}{2k}\right)^{2k} < \left(\frac{en}{k}\right)^{2k}$$