



Title	有理型函数ノ除外値ニ就イテ
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 19, p. 54-1-54-2
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73895
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

~~54~~ 有理型函数 / 除外値 = 就テ

角谷 静夫 (阪大)

H. Cartan ハ (C.R.t. 190 (1930) テ"次, 定理ヲ証明シタ。

$y = f(x)$ ヲ全有限平面テ"有理型函数 (有理函数ヲ除ク),
 $x = g(y)$ ヲソノ逆函数トシ Riemann 面 F_y 上テ"定義サレタルト
 スル。 a ヲ任意, 複素数トシ $|y-a| = R$ ナル円テ" F_y ヲ切ツタト
 シ, スベテ單葉ナル $|y-a| < R$ カ切リ取ラレルヲハ" (即チ $g(y)$,
 ソノ branch ヲトツテ $|y-a| < R = \text{singular point}$ カ"ナレハ")

$$(1) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f) - N(r, a)}{\log T(r, f)} \leq 1$$

が成立スル。但、 f が無限次ノ時ハ $\log r$, total variation が
 無限ナル intervals $I(r)$ ヲ除クモトスル。

コレヨリ

$$(2) \quad \delta(a) = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, a)}{T(r, f)} = 0$$

ヲ得ル。即チ a ハ R. Nevanlinna ノ意味ノ除外値ヲ"ハナシ。

H. Cartan ノ証明ハ不完全ニ思ハレルヲ"、=次=、同ニ"假定

(1) = (2) が成立スルコトヲ示サウ。

適當ナル一次変換ヲ施シタルヲ"レバ、 $a=0$ ナルニテ"定理ヲ証明
 スレバ"十分ナル。

$|y| \leq 2\rho = g(y)$ ノ" branch ヲトツテ" singular pt. カ"ナイト
 スレバ"

$$n(r, \rho e^{i\theta}) - n(r, 0) \leq \frac{L(r)}{2\rho} = \frac{1}{2\rho} \int_0^{2\pi} \frac{|f|^2}{1+|f|^2} r d\theta, \quad x = \rho e^{i\theta}$$

ルコトが容易ニワカル。但し $L(r)$ は $|x|=r$, $y(x)=0$ 写像ヲ更=
 $=0$ 二テ y -平面ニ切スル半径 $\frac{1}{2}$, Riemann 球面ノ上ニ射影
 シテ (L_r) ノ長サヲアリ、 ℓ ハ $|y|=2\rho$, $|y|=\rho$ ノ夫々球面上ニ射影
 テ得ラレル二ツノ円ノ間ノ球面上ノ最短距離ヲアル。

$\log r$ ニツイテ 1 カラ 2 マテ 積分 スレバ

$$\begin{aligned} N(x, \rho e^{i\phi}) - N(x, 0) &\leq N(1, \rho e^{i\phi}) - N(1, 0) + \frac{1}{2\ell} \int_1^r \int_0^{2\pi} \frac{|f'|}{1+|f|^2} d\theta dr \\ &\leq N(1, \rho e^{i\phi}) - N(1, 0) + \frac{1}{2\ell} \sqrt{\int_1^r \int_0^{2\pi} \frac{|f|^2}{(1+|f|^2)^2} r d\theta dr} \sqrt{\int_1^r \int_0^{2\pi} \frac{d\theta dr}{r}} \\ &\leq N(1, \rho e^{i\phi}) - N(1, 0) + O(\sqrt{A(x, f)} \sqrt{\log r}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, \rho e^{i\phi}) d\phi = T(x, \frac{f}{\rho}) - \log^+ \frac{|f(0)|}{\rho} \end{aligned}$$

両辺ニ用ヒルト

$$T(x, f) - N(x, 0) \leq K(f, \rho) + O(\sqrt{A(x, f)} \sqrt{\log r})$$

$= K(f, \rho)$ ハ f, ρ 1 $\equiv$ depend スル 常数 テアル。

カ finite order ナルトキハコノヨリ ⁽²⁾ ~~定理~~ 成立スルコトハ明カナル。

カ infinite order ナルトキハ $\varepsilon > 0$ 二対シ

$$A(x, f) < T(x, f)^{1+\varepsilon}$$

$I(r)$ ノ餘イテ成立スルカラ、 $\varepsilon < 1$ ナルヨリニトツテオケハ ⁽²⁾ ~~定理~~ 成立スルコトガナル。(証明終)

コノ証明ヲ見レバワカル如ク。上ノ定理ハ $|y-a|=k$ テ F_y
 ニ切ツタトキ、切り取ラレタ円板 $|y-a| < k$ カ 必スニモ重葉テ
 テモ、高々有限枚ニカツカラス。且、1) 枚数ニ上界ガアレバ成立スル。
 二界ガナクテモ $L_r =$ ヨツテ切ラレル円板 $|y-a| < k$ 最大連結枚数ヲ $p(r)$ トスル
 $\int_1^r \frac{(p(t))^2}{t} dt = O(A(r)^{1-\delta})$, $\delta > 0$ テアレバ定理ハ成立スル。