OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | 有理型函數ノ除外値ニ就イテ |
| Author(s) | 角谷, 靜夫 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 1934, 19, p. 54-1-54-2 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/73895 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# 有理型函数ノ除外値ニ就テ

角谷靜夫（阪大）

H.Cartan ハ C.R.t.190 (1930) デ次ノ定理ヲ証明シタ。

$y=f(x)$ ヲ全有限平面デノ有理型函数（有理函数ヲ除ク），$x=g(y)$ ヲソノ逆函数トシ Riemann 面 $F_y$ ノ上デ定義サレテオルトスル。$a$ ヲ任意ノ複素数トシ $|y-a|=k$ ナル円デ $F_y$ ヲ七カツタトシ、スベテ単葉ナ円 $|y-a|<k$ ガ七カリ取ラレルナラバ（即チ $g(y)$ ノソノ branch ヲトツテモ $|y-a|<k$ = singular point ガナケレバ）

$$(1)\qquad \overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{T(r,f)-N(r,a)}{\log T(r,f)} \leqq 1$$

ガ成立スル。但、$f$ ガ無限次ノ時ハ $\log r$ ノ total variation ガ無限ナ intervals $I(r)$ ヲ除クモノトスル。

コレヨリ

$$(2)\qquad \delta(a)=1-\overline{\lim_{r=\infty}}\ \frac{N(r,a)}{T(r,f)}=0$$

ヲ得ル。即チ $a$ ハ R.Nevanlinna ノ意味ノ除外値デハナイ。

H.Cartan ノ証明ハ不完全ニ思ハレルノデ、次ニ、同ジ仮定 (1)=(2) ガ成立スルコトヲ示サウ。

適當ナ一次変換ヲ施シタト考ヘレバ、$a=0$ トキニ定理ヲ証明スレバ十分デアル。

$|y|\leqq 2\rho = g(y)$ ノドノ branch ヲトツテモ singular pt. ガナイトスレバ

$$n(r,\rho e^{i\theta})-n(r,0)\leqq \frac{L(r)}{2\ell}=\frac{1}{2\ell}\int_0^{2\pi}\frac{|f'|}{1+|f|^2}r\,d\theta,\quad x=re^{i\theta}$$

ルコトが容易ニワカル。但 $L(r)$ ハ $|x|=r$ ノ $y(x)=ヨル$ 写像ヲ更ニ $=0$ ニテ $y$-平面ニ七カスル半径 $\frac{1}{2}$ ノ Riemann 球面ノ上ニ射影タモノ $(L_r)$ ノ長サデアリ，$\ell$ ハ $|y|=2\rho$, $|y|=\rho$ ヲ夫々球面上ニ射影テ得ラレル二ツノ円ノ間ノ球面上ノ最短距離デアル。

$\log r$ ニツイテ 1 カラ $r$ マデ積分スレバ

$$N(x,\rho e^{i\varphi})-N(x,0)\leqq N(1,\rho e^{i\varphi})-N(1,0)+\frac{1}{2\ell}\int_1^r\int_0^{2\pi}\frac{|f'|}{1+|f|^2}d\theta dr$$

$$\leqq N(1,\rho e^{i\varphi})-N(1,0)+\frac{1}{2\ell}\sqrt{\int_1^r\int_0^{2\pi}\frac{|f|^2}{(1+|f|^2)^2}r\,d\theta dr}\sqrt{\int_1^r\int_0^{2\pi}\frac{d\theta dr}{r}}$$

$$\leqq N(1,\rho e^{i\varphi})-N(1,0)+O\left(\sqrt{A(r,f)}\sqrt{\log r}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,\rho e^{i\varphi})d\varphi=T\left(r,\frac{f}{\rho}\right)-\log^+\frac{|f(0)|}{\rho}$$

両辺ニ用ヒルト

$$T(r,f)-N(r,0)\leqq K(f,\rho)+O\left(\sqrt{A(r,f)}\sqrt{\log r}\right)$$

$K(f,\rho)$ ハ $f,\rho$ ノミニ depend スル常数デアル。

ガ finite order ナルトキハコレヨリ (2) ~~定理~~ ガ成立スルコトハ明カデアル。

ガ infinite order ナルトキハ $\varepsilon>0$ ニ対シ

$$A(r,f)<T(r,f)^{1+\varepsilon}$$

$I(r)$ ヲ除イテ成立スルカラ，$\varepsilon<1$ ナルヨウニトツテオケバ (2) ~~定理~~ ガ立スルコトガワカル。（証明終）

コノ証明ヲ見レバワカル如ク上ノ定理ハ $|y-a|=k$ デ $F_y$ ヒカツタトキ，七カリ取ラレタ円板 $|y-a|<k$ ガ必ズシモ単葉デテモ，高ヒ有限枚シカツナガラズ且ツソノ枚数ニ上界ガアレバ成立スル。ニ界ガナクテモ $L_r$ ニヨツテセカラレル円板 $|y-a|<k$ ノ最大連結枚数ヲ $p(r)$ トスル

$\int^r\frac{(p(t))^2}{t}dt=O(A(r)^{1-\delta})$, $\delta>0$ デアレバ定理ハ成立スル。