



Title	正則函數ノ單葉性及ビ多葉性ニツイテ II
Author(s)	鍋谷, 堅次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 21, p. 3-6
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73899
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

62. 正則函数ノ單葉性及ヒ多葉性ニツイテ Ⅱ

金島谷 堅次郎 (東北大)

12号 36ノ拙論ニ對シテ 能代君カラ綿密ニ御注意ヲ頂キマシタカラ 御返答ヲ 乞フテ此所ニ掲載セルコトニシマス。其後ニ於テ述ベタ定理ノ、最後ノ一言ハ「誤リナシ」タ。限界ノ場合ヲネス函数ノ研究中ニ見テ各ニカ「アリマシタ」爲ニトシタ「間違ヒ」ヲ致シマシタ。最後ノ一言ハ抹殺シタイト思ヒマス。16号 46ノ尾崎君ノ定理5ガ正當ナ「ス」。

次ニ 能代君 御注意ヲ述ベホク自身モ「」ニ補ヒマシタ思ヒマス。

先ツ「定理1. $\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=\gamma} |f(z)-z| d\varphi \leq M$ ト云フ假定カラ $|a_n| \leq$ 出マス。何者、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad |a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\gamma^n} \int_{|z|=\gamma} |f-z| d\varphi \leq \frac{M}{\gamma^n},$$

$$\gamma \rightarrow 1 \text{ ノトキ } |a_n| \leq M$$

同様ニ「定理2」ヲ「 $G(z) = f - z = a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n +$

$$= u(r, \theta) + (v(r, \theta) + i u(r, \theta)) \text{ トフケハ」 } a_n = \frac{1}{\pi \gamma^n} \int_0^{2\pi} u(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi \gamma^n} \int_0^{2\pi} |v(r, \theta)| d\theta \leq \frac{2M}{\gamma^n}, \quad \gamma \rightarrow 1, \quad |a_n| \leq 2M$$

随ツテ $1 \geq \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \gamma^{n-1}$ ナリハ「 $|z| < \gamma$ 」ノ星型ト云フ定理カ

定理1ハ「 $|z| < \left| 1 - \sqrt{\frac{M}{M+1}} \right|$ 」ヲ「星型、定理2ハ「 $|z| < \left| 1 - \sqrt{\frac{2M}{2M+1}} \right|$ 」ヲ

星型トナリマス。

之ハ M ニ制限ガ「ナイコト」ガ少シヨクナツテ出マス。(以上ノコトハ檢査

宜明君カラモ御注意ヲ受ケタコトヲ一寸付カロヘマス)

次ニ 市原氏ノ複葉性ニ関スル定理

$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p + \dots$ が $|a_p| \geq \sum_{n=1}^{\infty} |a_{p+n}| \binom{p+n}{n} r^n$ とならば $f(z)$ は $|z| < r$ で正則且高々 p 葉である。

可用ヒマスト

定理 3. $\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} |f - (z + a_2 z^2 + \dots + a_p z^p)| d\varphi \leq M$ / 仮定が

$$|a_{p+n}| \leq M \quad (n=1, 2, \dots) \text{ が成り立つと}$$

定理 4. $\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} |R\{f - (z + a_2 z^2 + \dots + a_p z^p)\}| d\varphi \leq 2M$ より

$$|a_{p+n}| \leq 2M \quad (n=1, 2, \dots) \text{ が成り立つから}$$

結局 $|z| < 1 - \sqrt{\frac{M}{M+|a_p|}}$ で高々 p 葉 (定理 3)

$|z| < 1 - \sqrt{\frac{2M}{2M+|a_p|}}$ で (定理 4)

が成ります。ここで $M = \infty$ 無制限です。

次 =

定理 8. $f'(z) \neq 0$ / 仮定は不要です。何故なら $\frac{1}{2\pi} \int |f'| d\varphi \leq M$ より $f' = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots$, $|b_n| \leq M$ が成り立つから。いよいよ

定理 9. $f(z)/z$ / 仮定は不要です。

次 = 貴兄の与えられた問題

$f(z) = z + \dots$ が $|z| < 1$ で正則且 $|f(z) - z| < M$ かつ f の葉半径が成り立つ。これは本質 = 面倒 + 内題 / 様々です。私も今迄は得た結果が多少共参考になりました。

$\frac{f(z)}{z} = g(z)$ とすれば 明に $|g(z) - 1| < M$ for $|z| < 1$ となります。ヨウキロラタ有界函数ノ性質より $|g'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2} \frac{M^2 - |g-1|^2}{M}$

$$\text{故} = \left| \frac{zf'}{f} \right| \leq \frac{|z|}{1-|z|^2} \frac{|1^2 - |\rho-1|^2|}{M|\rho|} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{zf'}{f} \right| &\leq \frac{|z|}{1-|z|^2} \frac{M^2 - (\rho-1)(\bar{\rho}-1)}{M|\rho|} = \frac{|z|}{1-|z|^2} \frac{M^2 - (|\rho|^2 - (\rho+\bar{\rho}) + 1)}{M|\rho|} \\ &= \frac{|z|}{1-|z|^2} \frac{M^2 - (|\rho|^2 - 2R(\rho) + 1)}{M|\rho|} = \frac{|z|}{1-|z|^2} \frac{(M^2-1) - |\rho|^2 + 2R(\rho)}{M|\rho|} \\ &\leq \frac{|z|}{1-|z|^2} \frac{(M^2-1) - |\rho|^2 + 2|\rho|}{M|\rho|} \quad \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$M \geq 1$ と假定スル

$$1 - M|z| \leq |\rho| \leq 1 + M|z| \quad \text{for } |z| < \frac{1}{M}$$

(2) 小 $|\rho|$ の減少の数は "スカ" $|\rho| = 1 - M|z|$ と (2) = 代入スルハ

$$\begin{aligned} \left| \frac{zf'}{f} \right| &\leq \frac{|z|}{1-|z|^2} \frac{M^2 - M - |z|^2}{M(1-M|z|)} \quad \text{for } |z| < \frac{1}{M} \\ &= \frac{M|z|}{1-M|z|} \quad \text{故} = \frac{Mt}{1-Mt} = 1 \quad \text{ヨリ } t = \frac{1}{2M} \end{aligned}$$

定理 0. $f(z) = z + \dots$ $\forall |z| < 1$ "正則且 $|f-z| < M$ ($M \geq 1$) トスルハ" $|z| < \frac{1}{2M}$ $\Rightarrow$ "單葉-星型且 $f_0(z) = z + Mz$ が到達スル。何故ナラハ"

$$f'(z_0) = 1 + 2Mz \quad z = -\frac{1}{2M} \quad \text{"vanishes" スル。}$$

$$M < 1 \quad \text{トキハ "モ (2) ヲ適用スルコトニ依リテ } M \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ナラハ"}$$

定理 0 の成立スルコトがワカリマス。然レ $M < \frac{\sqrt{3}}{2}$ トキハ此ノ方法ヲハ困難ナキス。貴君ノ御研究ヲ原貞ヒマス。

能代君ノ御注意ニヨリ定理 8 ノ假定 $f'(z) \neq 0$ ノ不要トナリマシタ。從ツテ余、定理 8 ノ証明ハ徒勞ガ多ク含マレテ其ルト云フコトニナリマスガ其代償トシテ次ノ一結果ヲ述ベテマシマス

