OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	函數方程式　f(x)＝1/2 ∫ ^ 〈x+1〉 _ 〈x-1〉 f(t) dt ニ就テ
Author(s)	南雲，道夫；三野，良信；角谷，靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 21, p. 11-13
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73901
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

64 函数方程式 $f(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$ ニ就テ

(阪大) 南雲道夫, 三野良信, 角谷靜夫

任意ノ但シ長サガ一定ナル区間ニ於ケル平均値ガソノ区間ノ中点ノ値ニ等シイ函数ハ何カ?

一次整函数 $f(x)=ax+b$ ハ明カニ上ノ性質ヲモツ。然シ上ノ性質ヲ有スル函数ハ一般ニハ一次整函数トハ限ラナイ。(区間ノ長サガ任意ナラバ勿論一次整函数ニ限ル) 所デ特ニ $f(x)$ ガ $-\infty<x<+\infty$ デ有界トスレバ $f(x)$ ハ常数ナルコトガワカル。コレカラ $f'(x)$ ガ有界ナルトキハ $f(x)=ax+b$ ナルコトガ証明デキル ($f'(x)$ ノ代リニ $f^{(p)}(x)$ ガアル p ニ対シテ有界デアッテモヨイ)

[[一般ノ場合]] 区間ノ長サヲ2トスル。$f(x)$ ガ $-\infty<x<+\infty$ 内ノ任意ノ閉区間(有限ナ区間)デ積分可能トスレバ

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

ト置ケバ測度零ノ集合以外デ

$$(1)\qquad F'(x)=\frac{F(x+1)-F(x-1)}{2}$$

コトカラ $F(x)$ ガ連続微分可能ナルコト従ッテ逐次ニ無限回連続微分可能ナルコト(従ッテ $f(x)$ モ無限回連続微分可能)ガワカル。

今(1)ヲ満足スル任意ノ無限回連続微分可能ナ函数ヲ考ヘレバソノ導函数 $F'(x)=f(x)$ ハ問題ノ函数デアル。(1)カラ又ソノ任意ノ回数微分シタ結果ノ函数モ(1)ヲ満足スルコトガワカル。

$$(2)\qquad F^{(k)}(x)=\frac{F^{(k-1)}(x+1)-F^{(k-1)}(x-1)}{2}$$

[[定理]] 亜(x)ヲ閉区間 $-1\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ ($2>\varepsilon>0$; 任意)

テ定義サレタ任意ノ無限回連續微分可能ナ函數トスレバ
$-1 \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ テ $\Phi(x)$ ト一致シテ $-\infty < x < +\infty$ テ (1) ヲ満足スル様ナ函數 $F(x)$ ガ存在スル。

証明　$F(x)$ ヲ $-1 \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ テ $\Phi(x)$ ト一致シ $1-\varepsilon \leqq x \leqq 1$ テ無限回連續微分可能，$x = 1-\varepsilon$ テハ $F^{(k)}(x)$ ガスベテ $\Phi^{(k)}(x)$ ト一致シ $x = 1$ テ

$$\Phi^{(k)}(0) = \frac{F^{(k-1)}(1) - \Phi^{(k-1)}(-1)}{2}$$

ナル様ニ定メレバ (1) ヨリ $x \leqq -1$ 又ハ $1 \leqq x$ ニ於ケル $F(x)$ ガ一義的ニ自然ニ $-\infty \leqq x \leqq +\infty$ テ (1) ガ成立スル様ニ決定サレル事ガワカル。

故ニ問題ハ二ツノ x ノ値 $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ ニ於テスベテノ微係數ガ豫メ与ヘラレタ値ヲ取ル様ナ無限回微分可能ナ函數ノ存在ヲ証明スレバヨイ。即チ α_k, β_k $(k = 0, 1$ 　of inf $)$ ヲ与ヘタトキ

$$F(a) = \alpha_0, \qquad F(b) = \beta_0$$
$$F^{(k)}(a) = \alpha_k, \qquad F^{(k)}(b) = \beta_k, \qquad k \geqq 1$$

ナル $F(x)$ ノ存在ヲ証明スレバヨイ。コノ定理ノ証明ハ後ニ発表スル事ニシテ今コヽニハ省略スル。

〔〔$f'(x)$ ガ有界ナル場合〕〕　(2) カラ若シ $F^{(k)}(x)$ ガ有界即チ $|F^{(k)}(x)| \leqq M$ トスレバ $|F^{(k+1)}(x)| \leqq M$ 従ツテ $|F^{(\nu)}(x)| \leqq M$, $(\nu \geqq k)$ トナル。故ニ $F(x)$ ハスベテノ x ニツキ Taylor 級數ニ展開サレル。

$$F(x) = a_0 + \frac{a_1}{4!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}x^n + \cdots$$

$|a_n| \leqq M \quad (n \geqq k)$

$\max(|a_3|, |a_4|, \quad |a_{k-1}|, M) = M_1$ トオケバ

(3) $|a_i| \leqq M_1 \quad i = \overset{3,4,5,}{\cancel{0,1,2,}} \cdots$

(2) ニ於テ $x=0$ トオケバ

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k+2n}}{(2n+1)!}, \quad k = 1, 2, \cdots\cdots$$

コレヨリ $\left|\frac{a_{k+2}}{2\cdot 3}\right| \leqq \left|\frac{a_{k+4}}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\right| + \left|\frac{a_{k+6}}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\right| + \cdots$

(3) ヨリ $|a_{k+2}| \leqq M_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n}} = \frac{M_1}{15}, \quad k=1,2,3,$

(3) ニ於テ
M_1 ノ代リ $= \frac{M_1}{15}$ ヲ用フレバ

$$|a_{k+2}| \leqq \frac{M_1}{15^2},$$

コレヲ繰返セバ

$$|a_{k+2}| \leqq \frac{M_1}{15^\lambda} \qquad k = 1, 2, 3,$$

コレヨリ $a_{k+2} = 0, \qquad k = 1, 2, 3,$ (証明終)

[問題] 本問題ニ於テ $f(x)$ ヲドノ程度ノ仮定ヲ置ケバ $f(x) = ax+b$ トナルコトガ云ヒルカ。例ヘバ $f(x)$ ガ x ノ解析的整函数トヲバ如何？或ハ $f(x)$ ガスベテノ実ナル x デ解析的正則ト仮定ヲタトキ $f(x) = ax+b$ 以外ニ問題ノ性質ヲ有スル函数ガ果シテ存在スルカ？

以上　十一月ニ十七日.