



Title	單葉函數ニ於ケル廻轉定理ニ就テ
Author(s)	城, 憲三
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 22, p. a-g
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73902
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

全國紙上談話会 第22号 1934年 12月

65 單葉函數 = 於タル廻轉定理 = 就テ

阪大工學部 城憲三

§1 函數 $S(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ が單位円内 $|z| < 1$ 正則單葉ナルトシコ、Kfauue 1 函數ヲ $\mathcal{S}$ トスル。 $\mathcal{S}$, Unterklasse 1 函數族トシテ星型函數, 凸型函數アリ。コレヲ $\mathcal{S}^*$, $\mathcal{K}$ トスル。日月カ =

$\mathcal{S} \supset \mathcal{S}^* \supset \mathcal{K}$

I $k(z) \subset \mathcal{K}$ ナルトキハ 既ニ矢口イル様ニ

$$|\arg k'(z_0)| \leq 2 \arcsin r, \quad |z_0| \leq r < 1$$

等号ハ $k(z) = \frac{z}{1-\varepsilon z}$ ($|\varepsilon|=1$) ナル函數ニヨリテ至リ達サレル, [例17ハ Strohacker, Math. Zeitschr., 37, 1933 参照]

II $st(z) \subset \mathcal{S}$ ナルトキハ

$$(1) \quad |\arg st'(z)| \leq 4 \arcsin r, \quad |z_0| \leq r \leq \frac{\pi}{8}$$

= シテ等号ハ $st(z) = \frac{z}{(1-\varepsilon z)^2}$ ($|\varepsilon|=1$) ナル函數ニヨリテ至リ達サレルコトカ分リテイル。 [Marx, Math. Annalen, 107, 1933, 5. 66]

III $S(z) \subset \mathcal{S}$ ナルトキハ

$$(2) \quad |\arg S'(z_0)| \leq \varphi(r), \quad |z_0| \leq r < 1$$

ナル Schranke $\varphi(r)$. カナルコトヲ初メテ述ベ'タハ Bieberbach テ"アル。

[Math. Zeitschr. Bd. 4, 1917 S. 295-305] (本稿, 主要ナル目的ハ

(1) 結果ヲ良クシ (2) $\varphi(r)$ ヲ正確ニ求メルコトニアル。

定理1 $S(z) \subset \mathcal{S}$ ナルトキハ

$$(3) \quad |\arg S'(z_0)| \leq \sin \theta_0(r) \cdot \log \frac{1+r}{1-r} + 2 \arctan \frac{r \sin \theta_0(r)}{1 + r \cos \theta_0(r)}$$

$|z_0| \leq r$

ココニ $\theta_0(r)$ ハ

$$\psi(r, \theta) \equiv \sin \theta \cdot \log \frac{1+r}{1-r} + 2 \arctan \frac{r \sin \theta}{1 + r \cos \theta} \quad (r < 1)$$

ヲ Max. ナラシメタル θ 1 直ニアル。

且つ (3) の等号、成立スル函数ハ γ = 存在スル。

コノ定理ヲ証明スルタメニ現今マデノ結果ヲ述ベテ見タイ。

§2 Bieberbach の最初

$$(4) \quad |\arg s'(z_0)| \leq 2 \log \frac{1+r}{1-r} \quad (S(z) \in \gamma)$$

ナルコトヲ示シタ。シカシ (4) の等号、成立シ得ル函数ハ γ = 見ツカラナイ。ダカラ

(4) の *genaue Schranke* ヲ 問ハナイ。シカシ $|\arg s'(z_0)| \leq K \log \frac{1+r}{1-r} \quad (K < 2)$

ナルコトヲ言評價スルコトハ出来ナイ。ソレハ

$$S(z) = \frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2} \quad \text{ナルトキ} \quad S(z) = \frac{1+e^{i\alpha}z}{(1-e^{i\alpha}z)^3} \quad \text{ナリテ}$$

$$\log s'(z) = \log(1+e^{i\alpha}z) - 3 \log(1-e^{i\alpha}z) = 4e^{i\alpha}z + \dots$$

トナルカラ $\log$ ノ分枝ヲ $z=0$ ナルトキ 0 トナルモ、トシテ $z = ir e^{-i\alpha}$ トオケバ

$$\arg s'(z) = 4r + \dots,$$

$$\text{而シテ} \quad 2 \log \frac{1+r}{1-r} = 4r + \dots,$$

エカ極大ナルナルトキハ $k \log \frac{1+r}{1-r} \quad (k < 2)$ ナリ、困ルカラナリ。又一方

$$S(z) = \frac{e^{(1+i) \log \frac{1+z}{1-z}} - 1}{2(1+i)} \quad (\in \gamma)$$

ニ於テ z が実数値ヲトルトキ $z=r$ トシテ

$$\arg s'(z) = \log \frac{1+r}{1-r}$$

トナルカラ $k \log \frac{1+r}{1-r} \quad (k < 1)$ ナリ言評價スルコトモ出来ナイ。[Bieberbach

a. a. O. 又ハ G. Julia, *Leçon sur la représentation conforme des aires simplement connexes*, p. 97-98 参照]

最近ニ到リ M. Kössler 11 r

$$(5) \quad |\arg s'(z_0)|_{|z_0|=r} \leq \int_0^r \frac{2\sqrt{4-x^2}}{1-x^2} dx$$

ナルコトヲ示シタ。[Jahresbericht d. D. M. V. Bd. 41, 1932]

$$2 \log \frac{1+r}{1-r} = \int_0^r \frac{4dx}{1-x^2} > \int_0^r \frac{2\sqrt{4-x^2}}{1-x^2} dx$$

テアルカラ (5) ハ (4) ノ結果ヨリ ハヨイガシカシ H. Grunsky ハ (5) モ又 genaue Schranke ヲ與フルモ、テ"ナイコトヲ示シタ。[Jahresbericht d. D. M. V. Bd 42, 1933]、Kössler ハ (5) ヲ得テ後、再ヒ" (5) ヨリ 更ニヨイ結果

$$(6) \quad |\arg s'(z_0)| \leq 2|a_2|r + \frac{3}{2}r \log \frac{1+r}{1-r}$$

ヲ發表シタ。[Věstn. české Spol. Nauk, 1932] シカシ (6) ハ $r=0$ ノミニ於テ scharf テ" $r>0$ ナルトキハ scharf テ"ハナシ。 $r>0.8$ テ"ハ (9), (6) ヨリハヨイ。

其後 新シイ結果ナシニ今日ニ至リツテアルハ無念ナアル。

§3 定理 1 ノ証明ヲ與フルタメ、ドウ云フ風ニ考ヘタカヲ述べ"ヨウ。H Grunsky ガ彼ノ Dissertation [Schriften des mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin Bd. 1, 1932] テ"言証明シタニ、定理カラ出テスル。

定理 (Grunsky) $s(z) \in \gamma$ ナルトキハ

$$(7) \quad \left| \log \frac{s(z_0)}{z_0} + \log(1-|z_0|^2) \right| \leq \log \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} \quad |z_0| < 1$$

ナリ $\log \frac{s(z)}{z}$ ハ $z=0$ ノトキ 0 トナル。等号ハ (7) 數

$$(8) \quad s(z, z_0) = \frac{4z_0(1+|z_0|)^{2t}z}{(1-\bar{z}_0z)^{1+t} \left[(w-w_2)(1-\bar{w}_2w)^t \cdots (w+w_2)(1+\bar{w}_2w)^t \right]^2}$$

$$w = \sqrt{\frac{z-z_0}{\bar{z}_0z-1}}, \quad w_2 = \sqrt{z_0}$$

ニヨリテ 1 ニ至リ達サレル。即チ $\log \frac{s(z_0)}{z_0} = -\log(1-|z_0|^2) + t \log \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$, $|t|=1$

[注意] (8) ハ γ = 属シ $t=1$ ナルトキハ $\frac{z}{(1-\varepsilon z)^2}$, $t=-1$ ナルトキハ $\frac{z}{(1+\varepsilon z)^2}$

($\varepsilon = \frac{|z_0|}{z_0}$) トナル。

上ノ定理ヲ便宜上ニ次ノ様ニ書キカヘテオク。

定理 A

$$(9) \quad \left| \log \frac{z_0}{s(z_0)} - \log(1-|z_0|^2) \right| \leq \log \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$$

等号ハ (8) ノ (7) 數ニヨリテ 1 ニ成立シ

$$(10) \quad \log \frac{z_0}{s(z_0)} = \log(1-|z_0|^2) - t \log \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}, \quad |t|=1$$

次=, ヨリ知ラレタ Nevanlinna Transformation = ヨリテ

$$h(z) = - \frac{s\left(\frac{-z+z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right) - s(z_0)}{s'(z_0)(1-|z_0|^2)} = z + \dots, \quad |z| < 1$$

トオケバ $h(z) \in \gamma$ = シテ $z = z_0$ + ルトキニ次ノ関係カアル。

$$h(z_0) = \frac{s(z_0)}{s'(z_0)(1-|z_0|^2)}, \quad h'(z_0) = \frac{1}{s'(z_0)(1-|z_0|^2)^2}$$

從ツテ

$$(11) \quad \frac{z_0 \cdot s'(z_0)}{s(z_0)} = \frac{1}{1-|z_0|^2} \cdot \frac{z_0}{h(z_0)}$$

$$(12) \quad \frac{z_0}{s(z_0)} = (1-|z_0|^2) \frac{z_0 \cdot h'(z_0)}{h(z_0)}$$

之ノ式ノ関係カラ、定理 A カラ次ノ定理カ出ル。

定理 B $s(z) \in \gamma$ + ルトキハ

$$(13) \quad \left| \log \frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)} \right| \leq \log \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}, \quad |z_0| < 1$$

ココ = $\log \frac{z \cdot s'(z)}{s(z)}$ ハ $z=0$ + ルトキ零トナル分枝ヲトル。

上ノ等号ハ函数

$$(14) \quad s(z, z_0) = \frac{z_0}{(1-t|z_0|)^2} \left(\frac{(1-w-w_0)(1-\bar{w}_0 w)^{-1} + (1+w-w_0)(1+\bar{w}_0 w)^{-t}}{(1-w-w_0)(1-\bar{w}_0 w)^{-t} - (1+w-w_0)(1+\bar{w}_0 w)^{-t}} \right)^2,$$

$$w = \sqrt{z}, \quad w_0 = \sqrt{z_0}.$$

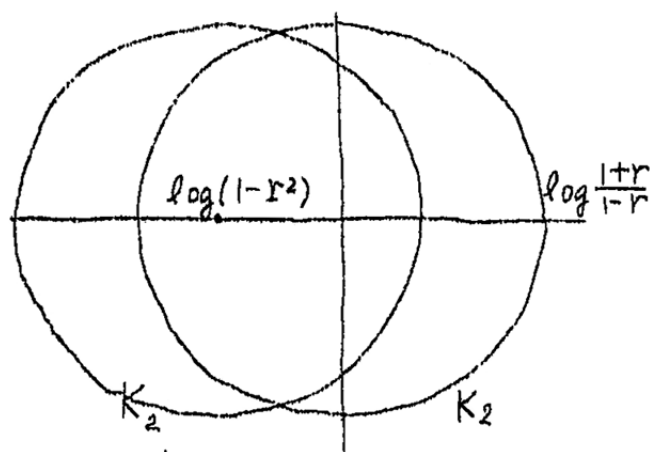
= ヨリテノ成立シ

$$(15) \quad \log \frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)} = t \log \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}, \quad |t|=1$$

ナル。

定理 A, B 間ニ上ノ如キ関係カアルテ (8), (14) ノ両函数ハ互ニ他ニ Nevanlinna Transformation ヲ行ハルモ、ナル。

不 等式 (13) ハ γ ノ Sternschränke ヲ決定スルモ、ナル。定理 A = ヨリテ $s(z) \in \gamma$ + ルトキ $\log \frac{z_0}{s(z_0)}$ ($|z_0| = r < 1$) ノ中心 $\log(1-r^2)$ 、半径 $\log \frac{1+r}{1-r}$ ノ閉円 K_1 内ニマリ 問上ノ具ハ函数 (8) = ヨリテノ取ラル。 ($|t|=1$ = シテ $t = e^{i\theta}$ トオケバ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ナル θ = 対シ周上ノ具カ"成"スルナリ)



テ"アルカラ K_1 十ル円ハ Rógosinski's
意見テ" $\log \frac{z_0}{s(z_0)}$ (Bildschranke)
与"ルモ"テ"アル。Mara ハ γ , K_1
函数ニ対シテハ $\log \frac{z_0}{s(z_0)}$, 正確十
Schrankeヲ与"タカ上ノ結果ハ得ラ
レ十カ"タ。 [Mara a. a. O.]

又定理 $B = \{z \mid s(z) \in \gamma\}$ 十ルトキ

$\log \frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}$ ハ原集ヲ中心トシ上ト同ジ半径 $\log \frac{1+r}{1-r}$, 閉円 K_2 内ニアリ
同上ノ集ハ函数 (14) = ヨ"ツテノミ取ヲレル。

$$(12) = \text{ヨレハ} \quad \arg \frac{z_0}{s(z_0)} = \arg \frac{z_0 \rho'(z_0)}{\rho(z_0)}$$

テ"ア"ツテ γ , スイ"テノ函数ニ対スル $|\arg \frac{z_0}{s(z_0)}|$ 及ビ" $|\arg \frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}|$, Schran
keハ同トナル。ソレハ $s(z)$ カ" γ 内ヲ動ケハ" 同時ニ $s(z)$, Nevanlinna Tran
sformationニテ得ラレタ $\rho(z) \in \gamma$ 内ヲ一通リ動ケカラテ"ル。之ニ肩想ニ
ハ Marx テ"ア"タ。 [Marx a. a. O.] コノ定理ハ誤解サレ易イカラ注意ニ付ケル
十ラヌ。 γ ノ函数 $s(z) = \xi$ ニ

$$s(z) = \frac{z}{(1-\xi z)^2}, \quad s(z) = \frac{z}{(1+\xi z)^2} \quad (|\xi|=2)$$

十ラサ"ル限リ一般ニ

$$(16) \quad \arg \frac{z_0}{s(z_0)} \neq \arg \frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}$$

テ"アル。

$$(17) \quad \arg s'(z) = \arg \frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)} - \arg \frac{z_0}{s(z_0)}$$

テ"アルカラ (16)ヲ無示見シテ $\arg \frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}$, $\arg \frac{z_0}{s(z_0)}$ カ" 同時ニ γ ノ Max. Min
ヲ取リ得ルモノノ如ク考ヘテ行"タ"カ" Bieberbach (14)ノ導十方テ"ア"タ。
即チコノ時ハ (17)ヨリ

$$|\arg s'(z_0)| \leq \left| \arg \frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)} \right| + \left| \arg \frac{z_0}{s(z_0)} \right| = 2 \log \frac{1+r}{1-r}, \quad |z_0|=r,$$

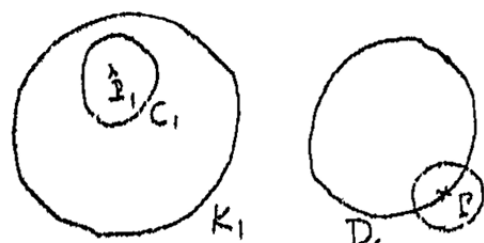
テ"アルカラ我々ハ $\log \frac{z_0}{s(z_0)}$ カ" K_1 内ヲウコ"ク時 $\log \frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}$ カ" K_2 , 何處ニル

カヲ石研究スレバヨイ。スルト (17)ノ關係ニヨリテ $\arg \frac{z_0}{s(z_0)}$ カ' K_1 内ニ於テ
 變ルトキ $\arg \frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}$ カ' K_2 ノ何處ヲ置カフカト云フコトヲ矢口ルコトニナル。コノ
 タメニハ (17) コリ $|\arg s'(z)|$ ヲ評價スレバヨイ。

定理 1ノ証明

$|\arg s'(z)|$ ヲ評價スルタメニ $\log s'(z)$ ($s(z) \in \gamma$)ノBildschranke D_s ヲ
 矢口レバヨイ。定理 Aニヨリ $\log \frac{z_0}{s(z_0)}$ ノBildschrankeハ開円 K_1 ニテアル。(17)
 ヨリ $\arg \frac{z_0}{s(z_0)} + \arg s'(z_0) = \arg \frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}$

然ルニ D_s (±境界点ノ値ヲ取ル函数ハ $f(s)$ ニ限ル。何故ナラ 若シ然ラズ



トナルヲ見ル) 境界点 P ノ値ヲ取ル函数ヲ
 $f(z)$ トスレバ ($f(z) \in \gamma$) $\log \frac{z_0}{f(z_0)}$ ハ K_1 内
 内ニテアル。(定理 A) コノ點ヲ P トスル。

P ヲ中心トシテ極小ナル円 C_1 ヲ考ヘ C_1 内ノ値ヲトル函数群 $s(z)$
 $\subset \gamma$ ヲ考フレバ 之等 $s(z)$ ニ於ケル $\log s'(z_0)$ ノ値ハ P ノ近傍ヲ
 全部覆フ。(嚴密ニハ連續性ヲ用ヒテ言正セラレル) 従リテ P ハ D_s ノ境界
 点トナリ得ナリコトニナルカラ假定ニ及スル。

タカラ D_s ノ境界点ノ値ヲ取ル函数ハ (8)ニ限ル。 ($k(z) \in \gamma$ ニ於テ
 $\log k'(z)$ ノBildschrankeハ分ツテアルカ' $\gamma, \gamma' = \pm$ ニ於テ $\log s'(z)$ ノBild-
 schranke $D_s, D_{s'}$ ハ未知ニアル。コノ點 D_s ノ虚数部分ノミヲ考フレバ足リル
 函数 (8)ノ $|\arg s'(z)|$ ヲ評價スレバ $s(z) \in \gamma$ ニナル $s(z)$ ノ $|\arg s'(z)|$ ノ評
 價ニナル。

函数 (8)ニ對シ $\frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)}$ ヲ計算スレバ

$$(18) \quad \frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)} = \frac{1}{1 - |z_0|^2} (1 + t |z_0|)^2$$

$$(t = 1) \text{トキハ } \frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)} = \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|}, \quad t = -1 \text{トキハ } \frac{z_0 s'(z_0)}{s(z_0)} = \frac{1 - |z_0|}{1 + |z_0|}$$

トナルヲ見ル)

$\log \frac{z_0}{s(z_0)}$ ($s(z) \in \mathcal{H}$) かつ K , 円周上ヲ内コ"タハ" $\log s(z_1)$ ハ D 内見
界上ヲ動クコトニ注意スレバ" (10), (18) ヨリ

$$|\arg s'(z)| \leq \int \left\{ t \log \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} \right\} + \int \left\{ \log(1+t|z_0|)^2 \right\}$$

$$|z_0| = r, \quad t = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{トキ}$$

$$(19) \quad = \sin \theta \cdot \log \frac{1+r}{1-r} + 2 \arctan \frac{r \sin \theta}{1+r \cos \theta} \equiv \varphi(r, \theta)$$

$\varphi(2, b) \rightarrow \text{Max.}$ トラニナル θ (直ニ $\theta_0(r)$ トスレバ"

$$(3) \quad |\arg s'(z_0)| \leq \sin \theta_0(r) \cdot \log \frac{1+r}{1-r} + 2 \arctan \frac{r \sin \theta_0(r)}{1+r \cos \theta_0(r)}$$

$$|z_0| \leq r$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \theta_0(r) = \frac{\pi}{2}$$

上ノ等号ハ函数 s ヲツテ到達サレル。 (証明終)

(19) 右辺ノ第 1 項, 第 2 項ハキハ $\leq \log \frac{1+r}{1-r}$, $2 \arcsin r$ 7 "アルカラ

$$(20) \quad |\arg s'(z_0)| \leq \log \frac{1+r}{1-r} + 2 \arcsin r = 4r + \dots$$

(20) ハ (3) ヨリハ勿言論ニイカ" Bieberbach ノ結果 (4) ヨリハ遙カニヨイコトカ" 分カラウ。

5 定理 2 $st(z) \in \mathcal{H}$ ナルトキハ

$$|\arg st'(z_0)| \leq 2 \arcsin r + \frac{\pi}{2}$$

$$|z_0| \leq r$$

等号ハ $st(z) = \frac{z}{(1-\varepsilon z)^2}$ ニヨリテ到達サレル。

証明 既ニ $\S 3$ 7 "述" 1 "タ" 様ニ $\log \frac{z_0}{st(z_0)} \left\{ \log(1-re^{i\varphi})^2 \right\}$, ($r=|z_0|$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

$$\text{故ニ} \quad |\arg st'(z)| \leq \left| \arg \frac{z_0}{s(z_0)} \right| + \left| \arg \frac{z_0 st'(z_0)}{s(z_0)} \right| \leq 2 \arcsin r + \frac{\pi}{2}$$

故ニ $st(z) \in \mathcal{H} = \mathcal{H}$ 7 "タ" シ

$$|\arg s'(z_0)| \leq \left| \arg \frac{(1+\varepsilon z_0)}{(1-\varepsilon z_0)^2} \right| \leq 2 \arcsin r + \frac{\pi}{2}, \quad r=|z_0|, \quad r > 1 \text{ ナルトキハ}$$

$$|\arg st'(z)| \leq \frac{3\pi}{2}$$

[証明終]

定理 A 1 応用トシテ K 級ノ單葉函数ノ擴張サレタル Verzerrungen 1/3 及ヒ"
種々ナル單葉 K 級函数ノ係数問題ヲ論ジ" 新シイ結果ヲ述" 1 "タ" イカ" 次回
ニコス" ルコトニスル。定理 1, 定理 2 ハ新定理 7 "アル。変ナ者 1 違ヒヲシテキル
カモ知" レス" 皆" 様" 御" 忠告ヲ切ニ" 込" ンテ" 願ヒ申シ" ア" マス。

(11月28日 受取)