



Title	Paley-Fejér-Szász ノ定理ニ就テ
Author(s)	高橋, 進一
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 22, p. A-B
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/73903">https://doi.org/10.18910/73903</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 66. Paley-Fejér-Szász 定理 = 就テ

高橋 進一 (阪大)

E. Landau: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. p. 63 = 次, 定理ガ'アル。

$$f(z) = \sum c_n z^n \quad |z| < 1 \quad \forall$$

$$|f(z)| < M, \quad |z| < 1; \quad c_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{トスルト}$$

$$\left| \sum_{n=0}^m c_n e^{n\varphi i} \right| < N \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

ココ =  $N$  ハ  $\varphi$  及ビ " $m =$ " 無關係トテ 常数ト'アル。

コノ定理ハ 次ノ様ニヤレバ Landauノ証明ヨリハ 幾分簡單ニ'アル。

$$\sum_{n=0}^m c_n e^{n\varphi i} = S_m(e^{i\varphi}) \quad \text{トオケハ}$$

$$S_m(e^{i\varphi}) = \frac{S_0(e^{i\varphi}) + S_1(e^{i\varphi}) + \dots + S_m(e^{i\varphi})}{m+1} + \frac{\sum_{n=0}^m n c_n e^{n\varphi i}}{m+1}$$

$$\text{ヨリ} \quad |S_m(e^{i\varphi})| \leq \left| \frac{S_0(e^{i\varphi}) + S_1(e^{i\varphi}) + \dots + S_m(e^{i\varphi})}{m+1} \right| + \frac{\sum_{n=0}^m n |c_n|}{m+1}$$

$|f(z)| < M, |z| < 1$  ト'アルカラ Fejérノ定理ニ依テ

$$\left| \frac{S_0(e^{i\varphi}) + S_1(e^{i\varphi}) + \dots + S_m(e^{i\varphi})}{m+1} \right| < M$$

又  $c_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$  ヨリ  $K \geq n c_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$  トル 常数  $K$  ガ'アル。

$$\text{依テ} \quad |S_m(e^{i\varphi})| < M + \frac{\sum_{n=0}^m K}{m+1} = M + K$$

即チ  $N = M + K$  ト置ケハヨク (Landauノ本ト'ハ  $N = M + 2K$  ト'ツテ'アル)

コノ定理ハ 單位円周ト'ルニ 樣ニ 収斂スルカ 絶對収斂ニ'イ 幕級數ガ存在スルト云フ Hardyノ定理ノ証明ニ用ヒラレル。

扱テ コノ定理ハ  $c_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$  ノ代リニ 次ノ様ニ Landau型ノ條件ニ置キ換ヘテモ成立スル。即チ  $c_n = \alpha_n + i\beta_n$  トオケテ

$$n\alpha_n > -K, \quad n\beta_n > -K \quad (K \text{ハ任意ノ正数})$$

コノト'ルニ 寸 Tanber型ノ定理ニ類似ト'形式ト'ツテ 興味ガ'アル。証明ハ 表題ニ'アル Paley-Fejér-Szászノ定理ヲ 幕級數ニ'通用シテ'アル。

Paley の Journ. London Math. Soc. vol 7 (1932) 7 "On Fourier Series with positive Coefficients. (表題, 下 = 次, 定理ヲ述ヘ'タ,

$f(x)$  7  $0 \leq x \leq 2\pi$  7 積分可能, 且

$$|f(x)| \leq M \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_2^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n \geq 0, b_n \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

トキトキ

$$|S_n(x)| \leq 10M \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

但ニ  $S_n(x)$  ハ  $f(x)$  の Fourier Series, 最初  $(n+1)$  項, 和ヲ"アル。今年 Fejer 7 Bull. Amer. Math. Soc. 40 (1934) p 469, On a Theorem of Paley 7 "10 7 4 7 置キカヘ'タ初等的証明ヲ公ニシタ。又 Szász の Acta Mathematica 61 (1933) p 185, Zur Konvergenztheorie der Fourierschen Reihen 7

$$na_n > -K, \quad nb_n > -K, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ナル條件 / 下 =  $S_n(x)$  が有界ナルコトヲ証明シタ。但ニ Paley 自身が既ニ其事ヲ知ツテ其ヲ未幾ヲ"アル。然シ  $|S_n(x)| < N$  ナル  $N$  値 = ツイテハ何等ノ知識ガ得ラレナイ。

其ヲコレヲ, Paley-Fejér-Szász 定理ハ conjugate Fourier Series = 証明カ = 成立スルカラ ソレカラ適當 = 考ヘテコケハ"上 = 述ヘ'タ 幕及數 = 開スル定理トナル譯ヲ"アル。コレハ相當 deep 7 定理ト思フカ"面白イ application が見付カラヌ / 7 "唯定理ヲ"ケヲ述"テオキマス。

附記: Paley-Fejér-Szász 定理 = ヨラナイ 7 直接証明ヲ"キ サウ = 思フカ" 今一寸考ヘ'ツカナイ。

(11月30日 受取)