



Title	調和函数ニ関スル二三ノ定理
Author(s)	鍋谷, 堅次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 23, p. 1-4
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73906
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

全國紙上数学談話会才23号

69. 言周和函数 = 関スルニニ、定理

金島谷堅次郎 (東北大)

先=和、"Remarks on some theorems concerning sections of a power series I and II" = 方今 Landau, Ergebnisse, 2te Auf. (1929) - Erster Kapitel, §1 及 "§2 = 方今、定理 → 拡張 = $\varphi = \equiv$ / 定理ヲテヘコシタ。コレ、其中東北数学雑誌 = 発表サレルコト思ヒマスガ、此處ニハ Landau 本ノ Erster Kapitel = 方今、一特殊ノ定理 = 并行シテ言周和函数ノ方ヲ"ニ同様ノコトガ成立シマスガ、ソノ中アマリニ注意サレテ升ナイモノヲ述ベテヲキタク思ヒマス。

定理1. $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

ヲ Klassen L^p ($p \geq 1$) = ソノカスル函数 $f(x)$ / Fourier series トシ

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n (a_{\nu} \cos \nu x + b_{\nu} \sin \nu x), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

トスルナ $\int_0^{2\pi} \left| \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_n(x)}{n+1} \right|^p dx \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx$

$p \geq 1, \quad n=0, 1, 2, \dots$

証明ハ Fourier 級数論方今 Landau Fejér / 積分

$$\frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_n(x)}{n+1} = \frac{2}{\pi(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} \left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t} \right)^2 dt$$

= 上ニ引用シテ生成論 = 方今、ト同様ノ方法ヲ用ニシテ得ラルマス。

$$\left(\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n S_{\nu}(x) \right)^p = \frac{2}{\pi(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n S_{\nu}(x) \right)^{p-1} \left(\frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} \right) \left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t} \right)^2 dt$$

7" スカラ

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n S_\nu(x) \right|^p dx &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n S_\nu(x) \right|^{p-1} \left(\frac{f(x+2x) + f(x-2x)}{2} \right) \left(\frac{\sin(n+1)x}{\sin x} \right)^2 dx \\
 &\leq \int_0^{2\pi} \frac{2}{\pi(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n S_\nu(x) \right|^{p-1} \left(\frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} \right) \left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t} \right)^2 dt dx \\
 &= \frac{2}{\pi(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n S_\nu(x) \right|^{p-1} \left| \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} \right| dx \left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t} \right)^2 dt \\
 &\leq \frac{2}{\pi(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n S_\nu(x) \right|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t} \right)^2 dt \\
 &\leq \frac{2}{\pi(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n S_\nu(x) \right|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{f(x+2t)}{2} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{f(x-2t)}{2} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t} \right)^2 dt \\
 &= \frac{2}{\pi(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n S_\nu(x) \right|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} 2 \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{f(x)}{2} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t} \right)^2 dt \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n S_\nu(x) \right|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \frac{2}{\pi(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t} \right)^2 dt \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n S_\nu(x) \right|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}
 \end{aligned}$$

$$\text{故に} = \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n S_\nu(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\text{定理 2. } u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n$$

7) $|z| < 1$ ($z = r e^{i\theta}$) に対し、 u は周界上の函数に

$$S_n(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

トスルハ

$$\int_0^{2\pi} |S_n(\frac{r}{2}, \theta)|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} |u(r, \theta)|^p d\theta, \quad p > 1, n=0, 1, 2, \dots$$

此定理2, 及"次" = 述べた定理3, 4, の証明ハココニハ 畧シユス。 3
 = 3 | 用ニタ 推論 或ハ Landau - 本ヲ 参照サレト 容易ニ ワカリマス。

定理3 $u(r, \theta)$ 前定理ニ 於ケルト 同様ノ 函数ニ 更ニ

$$|u(r, \theta)| \leq 1, \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\Re u(r) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) r^n$$

トスルハ $\Re u(r) = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-r}}\right)$

定理4 $u(r, \theta)$ ハ 前定理ト 同様トシ

$$\Re u(r) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta| r^n$$

トスルハ $\Re u(r) \leq 1$ ナル 場合 $u(r, \theta) =$ 無関係ノ 常数 φ が 存在シタ。
 $\varphi = \frac{1}{3}$

是ヨリ ハ 大キク 出来ナイ。

次ニ 上ニ 3 | 用ニタ 推論ニ 於ケル 定理1

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ヲ $|x| < 1$ 正則トシ $S_n(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{\nu}, \quad n=0, 1, 2, \dots$ | スルハ $|x| \geq 1$ =

対シテ $\int_0^{2\pi} \left| \frac{S_0(x) + \dots + S_n(x)}{n+1} \right|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|^p d\theta, \quad x = re^{i\theta}, \quad n=0, 1, 2,$

= 対シテ 亦ハ 等号が 成立スルハ $f(x)$ が 常数トシテ 限ルコトヲ 示シマスニ タカシノ

証明ニ

$$\frac{1}{x^n} (1+x+\dots+x^n)^2$$

カ $|x|=1$ 対シテ 常ニ 一定ノ amplitude ヲ 有スルニ 至リ 性質ヲ 用ヒマシ
 タ。 コノ 性質ノ 証明ヲ ニツケルマシタカ 算ルニ 現時ノ 不足ノ 多

4.

迂遠ヲアリマシタ。ニ次ノ本義ニシタ方カ適切ナルト思ヒマス。

$$\frac{1}{x^n} (1+x+\dots+x^n)^2 = \left(\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + 1 \right) (1+x+\dots+x^n)$$

$$= (1+x+\dots+x^n) (1+x+\dots+x^n) = |1+x+\dots+x^n|^2$$

右辺ハ real ナリ一定ノ Amplitude 7 有マス。

(12, 11 交換)

補遺 — 有理型函数ノ derivative = ツイテ。吉田耕作。

21 号ノ定理ハ次ノ本義ニ於テラズ。証明畧シテス。

$y = f(x)$ ノ逆函数 $x = g(y)$ ノ Riemann 面 $F_y = \{y \mid |y| < \delta\}$

ナル円ヲ以テカハキテカラレタモ、カ全テ $y = 0$ ノ ∞ singularity = スルナラバ

$$\sum \frac{1}{|x_i|^{2+q} |\sqrt[n]{c_i}|^2} = \text{convergent for } q > 0$$

但シ $x_1, x_2, \dots$ ノ $f(x)$ ノ 0-point (without multiplicity)

又 x_i ノ近傍ニ於テ Taylor 展開シ $f(x) = C_i (x-x_i)^{n_i} + \dots$

$n_i \geq 0, C_i \neq 0$ 。

之ニヨリハ、特別ナリ場合ノ domaine de determination 0 de $f(x)$

内ニ於ケル $f(x)$ ノ 行重カ ($x = \infty$ ノ近傍ニ於ケル) = ツイテ、議論カテ

マス。併シ筆者、欲シハ、一般ニ F_y ノ point transcendent ノ近傍

ニ於ケル $f(x)$ ノ状態ヲ精シク言フベキナリ。

——正誤——

第23号、69「調和函数ニ関スル二三ノ定理」デハ定理
1ノ他ハ全部証明ヲ略シマシタガ、之ハ次ノ機会ニシテ
ベタ文献ノ主ナルモノト併セテ何処カヘ飛表スル積リデ
ス。実函数論ノ知識ニ乏シク、又引用シタ“Remarks
on some theorems concerning sections
of a power series I and II”ニ於テモ、唯
Landanノ本ヲ ergänzen スル意味デ書イタモノ
デ文献ハ全然アゲマセンデシタ。此ノ論文ノ出来タ動
機ハ談話會デ高見稔様ノ代数曲線ニ関スル御研究ヲ伺イ
テ居ル中ニ拾ツタモノデス。次ニ先日寄稿シタ「星型描
寫ニ就テ」ノ中ノ Studyノ定理ノ横張ニ就テハ淡中君
ノ御意見ヲ仰イガコトガアツタコトモ附ケ加ヘネバナリ
マセン。—— 鍋谷堅次郎