



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | 單葉函數ニ就イテ                                                                    |
| Author(s)    | 檜垣, 宣明; 鍋谷, 堅次郎                                                             |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1934, 23, p. 70-1-70-2                                           |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/73907">https://doi.org/10.18910/73907</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# 10. 單葉函数 = 就テ

檜垣宣明、金岡谷聖次郎 (東北大)

先日檜垣君が私の次、様々考へヲ話サレマシタ、ソレハ單位円ヲソノ内部及ビ周上ニ於テ正則ナル函数ニヨリ一ツノ星型領域ニ描寫シタトキ、ソノ星型領域ノ窪ミダ矣、數ヲ調ベルコトが出来ナイカラウカト云ツノデスカ此ノ考ヘガ面白カツタノデ一緒ニ考ヘテ居ル中ニ次ノ様ナ一結果ニ到達シマシタ、

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

ヲ單位円内テ正則デ  $\frac{f(z)}{z} \neq 0, \quad f'(z) \neq 0$

ヲアルトシマス、 $w$  平面ノ原點カラ出ル Radius-Vektor ト  $|z| = r$  ( $0 < r < 1$ )ニ対応スル曲線  $C_r$  ト、交點ニ於ル  $C_r$ ノ normal トソノ Radius-Vektor ノナス角ハ  $\arg \frac{zf'}{f}$  デ表ハサレマス、故ニ Radius-Vektor ト normal ガ重ナル矣ハ即チ

$$\arg \frac{zf'}{f} = 0$$

ナル矣デス、此ノ稱ナ矣ヲ今假ニ  $C_r$ ノ頂點ト呼ンデオキマセウ、

$$W = \frac{zf'}{f} = 1 + b_2 z + \dots$$

單位円内テ正則デ 0 ナル値ヲ取リマセン、從ツテ  $w$  平面ニ於ル  $|z| = r$ ニ対応スル曲線ハソノ内部ニ  $W = 1$  ナル矣ヲ含ミ 0、也ナル矣ハソノ外部ニアリマス、故ニ此ノ曲線ト区間  $(0, 1)$  及ビ  $(1, \infty)$ ハ夫々リクトモ一矣ツツ交點ヲ有シマス、故ニ我々ノ考ヘル  $w = f(z)$ ニ對シテハ任意ノ  $C_r$  ( $0 < r < 1$ )ニ對シテ頂點カ少クトモニツアルコトガ分リマス、次ニ  $w = f(z)$ ガ如何ナル條件ヲ有スルトキニ任意ノ  $r$ ニ對シテ頂點ノ數ガ丁度ニツアルカト云フ問題ニ對シテハ、勿論必要ニレテ且十分條件ハ容易ニハ求マラナイデセウガ次ノ稱ナ充分條件モ面白イデセウ、ソレハ  $|z| < 1$ ニ対応スル  $w$  平面ニ於ル領域ガ  $W = 1$ ニ關スル星型領域ナラバ  $|z| = 1$  P

対応スル曲線ト実軸トノ交点ハ丁度ニツデスカラ従ツテ  $\gamma$  上ノ頂点ノ数ハニ  
デアルト云フコトニナリマス。コレヲ  $f(z)$  ニ對スル條件デ表ハスナラバ

$$R \left\{ \frac{z \frac{d}{dz} \left( \frac{zf'}{f} - 1 \right)}{\frac{zf'}{f} - 1} \right\} = R \left\{ \frac{\frac{zf'}{f} \left( 1 + \frac{zf''}{f} - \frac{zf'}{f} \right)}{\frac{zf'}{f} - 1} \right\} > 0$$

トナリマス。尚  $\frac{zf'}{f}$  が  $z$  ノ實軸上ノ点而シテ實軸上ノ点ニ對シテノ  $real$

値ヲ取ル函数デアルト云フコトが一ツノ十分條件デアルコトモ容易ニ分リマス。

函数  $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$  ハ上ノニ條件ノ孰レニモ適合シテ居マス。又  $f(z) \equiv z$  ニ就

テハ  $\gamma$  上ノ点ガ總テ頂点ニナツテ居ルコトモ注意スベキデス。序ニ初ニ考ヘテ

$f(z) = z$  ニ更ニ  $odd$  ト言フ條件ヲ附ケ加ヘルト任意ノ  $\gamma$  ニ對シテ頂点ノ数ガ少ク

モ四ツアルコトモ容易ニ分リマス。次ニ  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$

ガ單位円内デ正則且單葉ナルトキハ

$$\left| \log \frac{zf'}{f} \right| \leq \log \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

ナル不等式ガ成立スルコトハ H. Grunsky が彼ノ Dissertation デ証明シテ居ス。

其處ニハ  $|z|=1$  ニ對シテ

$$\log \frac{zf'}{f} = o \log \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

トナル称ナ凡テノ函数ガ示サレテ居マスカオニイトスルナラバ

$$\text{amp. } \frac{zf'}{f} = i \log \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

トナル称ナ函数  $f(z)$  モアルケテスカラ

$$\left| \text{amp. } \frac{zf'}{f} \right| \leq \log \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

ナル不等式モ *best possible* ナ一ツデアルコトガ分リマス

以上述べタ事ニ關聯シテ尚種々ノ問題ガ出テ來ルコトト思ハレマスガ今ハ未準

備中デス。

(12 11 受取)