



Title	星型描寫二就テ
Author(s)	鍋谷, 堅次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 24, p. 1-9
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73908
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

71. 星型描寫ニ就テ

鍋谷堅次郎(東北大)

§1. $W=f(z)$ が單位円 $|z|<1$ に於テ正則デ、ソレヲ
ハーツノ凸領域ニ等角ニ描寫スル函数トシマス。E. Study 氏
ニヨリ、任意ノ γ ($0<\gamma<1$) ニ對シテ $|z|<\gamma$ ノ領域ニ
亦、 $W=f(z)$ ニヨリハーツノ凸領域ニ描寫サレルコトが知ラ
レテ居マスガ、コレニ對シテ T. Rado 氏 (Math. Ann.,
102, 1930) ハーツノ *höflich* ナ証明法ヲ與ヘマシタ。コ
ノ方法ニヨルト次ノ様ナ事實ニ容易ニ証明サレルコトハ W.
Seidel 氏 並ビニ高橋進一君が指摘サレマシタ。即チ、
 $W=f(z)$ が單位円内 $|z|<1$ に於テ正則デ、簡單ノタメニ
 $f(0)=0$ ト假定シテ單位円 $|z|<1$ 上ノ W -平面ニ於ケル原
点ニ關スルハーツノ星型領域ニ等角ニ描寫スル函数トシマス。
然ルトキハ、任意ノ γ ($0<\gamma<1$) ニ對シテ $|z|<\gamma$ 上ノ
 W -平面ニ於ケル原点ニ關スルハーツノ星型領域ニ描寫サレマ
ス。Study ノ定理ト呼バレテ居ル上ノ事實ハ元ハ Carathéodory
ト Blaschke ノ共著、Vorlesungen
über ausgewählte Kapitel der Geometrie, I,
p. 109 カラ出テ居ルノダスガ、之レニ對スル文献トシテハ古
クハ Carathéodory, Über die Studysche
Rundungsschranke (Math. Ann., 79, 1919, p.)

があり、最近デハ Carathéodory の指導ヲ受ケタ Ernst
 Peschl の學位論文 (Math. Ann., 106, 1932, p.)
 がアリマス。私ハニノ Peschl の研究ニ別載サレテ上述ノ
 Rado 氏ノ論文ヲ終尾サセタ、サマエカナ一研究ヲニスコト
 が出来タノデスガ、ソノ要點ヲ次ニ述ベテミタイと思ヒマス。
 私ニハ未完成ト考ヘラレマスガ、忙シサマギレテ、勞ヲイ
 トハス積リデハ下リマスガ其後久シク再び筆ヲ取ル機會ノナ
 イノヲ残念ニ思ッテ居マス。

§2. 初メニ一ツ定義ヲ與ヘマス。無限遠点ヲ含マヌ一
 ツノ單一連結ノ領域ガソノ有限遠ニアル境界上ノ一一定点ニ関
 シテ、ソノ点トソノ領域内ノ任意ノ一点トヲ結ブ線分上ノ点
 ヲ總テ含ム場合ニ、ソノ領域ノコトヲソノ境界上ノ一点ニ関
 シテ單里デアルト云フコトニシマス。ソコデ次ノ様ナ定理ガ
 成立シマス。

定理 $f(z)$ ヲ單位円内 $|z| < 1$ ニ於テ正則且ツ單葉デ
 アルトシ、 $W = f(z)$ ニヨリ $|z| < 1$ ガ描寫サレテ出来ル
 W -平面ニ於ケル領域 D ヲソノ境界上ノ一点 W_1 ニ関シテ單
 里デアルトシマス。 W_1 ニ於ケルコノ領域ノ内部ヘ一ツノ cut
 ニ對シテ W -平面デハ單位円 $|z| = 1$ 上ノ一点デ終ル矢張り
 一ツノ cut ガ對應シマス。此ノ cut ノ end-point ハ
 簡單ノタメニ $z = 1$ ト假定シテモ支障アリマセン。然ルト
 キハ單位円ニ含マレ $z = 1$ ニ於テソノ内部カラ切スル任意ノ

円ノ内部ニ亦 W_1 = 開スルーツノ星型領域ニ描寫サレマス。

此ノ定理ヲ証明スルノニ、 W_1 = 於テ D ノ任意ノ一点 $f(z)$ ト W_1 ヲ結ブ線分カラナルスルーツノ cut γ_w ヲ作りマス。コノ cut = 對應シテ $|z| < 1$ デモスルーツノ cut γ_z ガキマリマスガ、ソノ $end-point$ ラ簡單ノタメニ $z=1$ トシテオキマス。 t ヲ區間 $0 < t < 1$ ノ任意ノ定マツター一点トシマス ト γ_w 上ノ $tf(z) + (1-t)w_1 = h$ γ_z 上ノ $z_1 = f^{-1}(tf(z) + (1-t)w_1)$ ガ對應シマス。次ニ γ_w 上ノ $tf(z_1) + (1-t)w_1 = t\{tf(z) + (1-t)w_1\} + (1-t)w_1 = t^2f(z) + (1-t^2)w_1 = h$ γ_z 上ノ $z_2 = f^{-1}(tf(z_1) + (1-t)w_1) = f^{-1}(t^2f(z) + (1-t^2)w_1)$ ガ對應シマス。
 γ_w 上ノ $tf(z_2) + (1-t)w_1 = t\{tf(z_1) + (1-t)w_1\} + (1-t)w_1 = t^2f(z_1) + (1-t^2)w_1 = t^2\{tf(z) + (1-t)w_1\} + (1-t^2)w_1 = t^3f(z) + (1-t^3)w_1 = h$ γ_z 上ノ $z_3 = f^{-1}(tf(z_2) + (1-t)w_1) = f^{-1}(t^3f(z) + (1-t^3)w_1)$ ガ對應シマス。以下ハ同様ニシテ順ニ進ムコトが出来マス。ソコデ若シ N ノ十分大キイ或整数ノ値ヨリ大キイ然テノ整数 n = 對シテ

$$\frac{1 - |f^{-1}(tf(z_{n-1}) + (1-t)w_1)|}{1 - |z_{n-1}|} = \frac{1 - |z_n|}{1 - |z_{n-1}|} > 1$$

デアルトシマス。 $n > N$ = 對シテ

$$1 - |z_n| > 1 - |z_N|$$

トナリマス。 一方 $f(z_n) = t^n f(z) + (1-t^n)w_1$ ナスカラ

$n \rightarrow \infty$ ノトキ

$$f(z_n) \rightarrow w_1$$

トナリマス。故ニ $n \rightarrow \infty$ ノトキ

$$z_n \rightarrow 1$$

トナリ、コノニーツノ矛盾が得ラレマシタ。従ッテ $\{n\}$ ノ
適當ノ *sub-sequence* $\{n_p\}$ ニ對シテ

$$\frac{1 - |f^{-1}(tf(z_{n_p}) + (1-t)w_1)|}{1 - |z_{n_p}|} \leq 1$$

トナル様ナ $\{n_p\}$ がアリマス。コノ結果ニヨリ我々ハ
Schwarz、*Lanma* ヲ擴張シタ *Julia-Cara-*
théodory ノ定理ヲ函數 $f^{-1}(tf(z) + (1-t)w_1)$ ニ適用ス
ルコトが出来マス。

$$\lim_{n_p \rightarrow \infty} \frac{1 - |f^{-1}(tf(z_{n_p}) + (1-t)w_1)|}{1 - |z_{n_p}|} = \alpha \leq 1$$

デアリマスカラ、 z が單位円ニ含まレ $z=1$ ニ於テ、ソレニ
内部カラ切スル任意ノ定マツターツノ円内ニアルトキハ、
 $f^{-1}(tf(z) + (1-t)w_1)$ モコノ円ノ内部ニアルコトが言ヘマ
ス。言ヒカヘルト z が上述ノ様ナ円内ノ点デアルト $tf(z)$
 $+ (1-t)w_1$ ハ $w = f(z)$ ニヨリ上述ノ円ニ對應スル
 w -平面上ノ領域ノ点トナリマス。此ハ區間 $0 < t < 1$ ノ任
意ノ点デアリマスカラ、我々ノ定理ハ証明サレマシタ。函數
 $w = f(z)$ ハ此ノ定理ノ條件ニ叶フ具体的ノ例ガ、ソノ星型

ノ頂点ハ $W = -\frac{1}{4}$ デス。

上ノ定理ノ他ニホド二三ノ定理ガアルノデスガ一例トシテソノ中ノ一ツヲ列ベマス。

定理 $f(z)$ ヲ單位円内 $|z| < 1$ デ正則且ツ單葉デ、
 z ノ *real* ノ値ニ對シテ *real* ノ値ヲ取り、 $|z| < 1$ 、
 $\mathcal{D}\{z\} > 0$ ナル領域ヲ W -平面ニ於ケル一ツノ凸領域ニ等角
ニ描寫スル函數トシマス。然ルトキハ z -平面ニ於ケル實軸
ト $+1$ 及ビ -1 ヲ通ル任意ノ円ノ弧ニヨリカゴマレ $|z| < 1$
ニ含マレル領域モ亦一ツノ凸領域ニ描寫サレマス。

此ノ定理モ前ト同様ノ方針デ矢張り一種ノ Schwarz
ノ Lemma ノ擴張ヲ用ヒテ証明サレルノデスガ、ソノ
Lemma 及ビ上述ノ Julia-Carathéodory ノ定理ニ
就テハ Carathéodory; Conformal Representation
(Cambridge Tracts. No. 28) ヲ参照シテ
下サイ。

§3. 此ノ前ノ「單葉函數ニ就テ」ニ二三ノ補足ヲシタ
イト思ヒマス。

$$W = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

ヲ單位円内デ正則デ

$$f'(z) \neq 0$$

デアルトシマス ト $|z| = r$ ($0 < r < 1$) ニ對應スル W -平面
上ノ曲線 C_r 上ノ z ニ對應スル一ノ点ニ於ケルコノ曲線ノ曲率

ハ

$$\frac{R\left\{1 + \frac{zf''}{f'}\right\}}{|f'|}$$

が與ヘラレマス。故ニ C_r 上ノ曲率ガ 0 トナル点、即チ変曲点ハ

$$R\left\{1 + \frac{zf''}{f'}\right\} = 0 \quad |z| = r$$

或ハ

$$\text{amp}\left\{1 + \frac{zf''}{f'}\right\} = \frac{\pi}{2} \quad |z| = r$$

ニヨリ定マリマス。故ニ此ノ前述ベタ頂点ノ數ニ關スル梅垣君ノ十分條件ト同様ニシテ任意ノ r ニ對シテ C_r 上ノ変曲点ノ數が高々ニツデアルタメノ十分條件トシテ C_r が卵形線デアルトイフ性質ヲ取ルコトガ出來マス。コレヲ函数 $f(z)$ ニ對スル條件ヲ表ハスナラバ

$$R\left\{1 + \frac{z \frac{d^2}{dz^2}\left(1 + \frac{zf''}{f'}\right)}{\frac{d}{dz}\left(1 + \frac{zf''}{f'}\right)}\right\} \geq 0$$

トナリマス。ココニ注意スベキコトハ r が十分小サイトキハ変曲点ガ全然ナイト云フコトデス。

次ニ單葉函数論ヲハ

$$\frac{d \text{amp } f(z)}{d \text{amp } z} = R\left(\frac{zf'}{f}\right)$$

ナル函数が重要ナ意義ヲ持ツテ居マスが、之ヲ角速度ト假ニ
呼ブコトニスレバ

$$\frac{d^2(\text{amp } f(z))}{d(\text{amp } z)^2} = \Im \left\{ \frac{zf'}{f} \left(1 + \frac{zf''}{f'} - \frac{zf'}{f} \right) \right\}$$

ヲ角加速度ト呼ブコトが出来マス。コノ様ナ *Quantity*
ニ就テモ研究スベキ問題ガナイデセウカ。又 檜垣君ガ注意セ
ラレタ様ニ

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

ガ $|z| < 1$ デ正則デ

$$\frac{f(z)}{z} \neq 0, \quad f'(z) \neq 0$$

ナル條件ヲ満足スルトキ、 $|z| = r$ ($0 < r < 1$) = 對應スル
W-平面ニ於ケル曲線 C_r ト原点カラ出ル *Radius-Vector*
ノ交点ニ於ケル C_r ノ法線トソノ *Radius-vector* ノナ
ス角ガ最大ニナル点デハ

$$\Re \left\{ 1 + \frac{zf''}{f'} - \frac{zf'}{f} \right\} = 0$$

トナリマス。尚此ノ前述マシタ頂点ノ數ガ二ツアレタメノ
必要ニシテ且ツ十分ノ條件ニ就テモ共々ニ考究シタイト思ヒ
マス。研究スベキ問題ハ澤山アルト思ヒマスガ得ラレタ結果
ハ機ヲ見テ悉表スルコトニ著シマス。

§ 4. 函数ノ Ω -点ニ関スル *Kleine Bemerkung* ヲ
述ベテ終ルコトニシマス。

定理. 函数

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

ヲ $|z| < 1$ ナ正則ナ

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq M, \quad 0 \leq r < 1; \quad M > 0$$

ナル條件ヲ満足スルモノトシマス。 $n \geq 1$ ニ對シテ

$$M \geq |a_n| > M \left(1 - \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \right)$$

ナルトヤハ $f(z)$ ハ常ニ

$$|z| < \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

ナル領域内ニ丁度 n 個ノ零点ヲ持ツ。コノ限界 $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ ハヨリ大キクスルコトモ、ヨリ小サクスルコトモ出来マセン。

コノ定理ハ代数方程式ノ根ニ關スル、ヨク知ラレタ Pellet
ノ定理ヲソノマ、累級數ニ拡張シタモノ (Walsch, *Annals*
of Math., 1928?) = 昭和七年ノ帝國學士院記事ニ於ケ
ル能代君ノ論文ニアル方法ヲ應用シア得ラレマス。

§5. 本紙上談話會誌上ニ載セテ頂イタ拙文ノ全体ヲ私
ノ只今マデノ研究ノ大体ハ盡サレテ居ルト思ヒマス。今更申
シマスノモ可笑シイ位デ御座イマスガ此ノ際學生時代カラ主
トシテ御指導ヲ受ケマレタ 藤原先生並ニ 寛田先生ニ衷心カラ
深い感謝ノ意ヲ捧ゲマス。私ノ研究ニ幾ラカデモ見ルベキモ

ノが御座イマシタナラバ、ソレハ偏＝両先生ノ御功績＝帰ス
ベキデ御座イマス。此ノ可弱イ缺點＝満々ター個ノ人間が今
日アル処マデ辿リ來レコトが出来マシタノハ私ノ両親ハモト
ヨリ、藤原先生、窪田先生ヲ初メトシテ幼少ノ頃カラノ諸先
生方、先輩諸兄、親戚知人及び友人並＝生徒諸子ノ御蔭＝ヨ
ルコトヲ思ヒ、心カラノ祈リト感謝ヲ捧ゲマス。又藤原先生、
窪田先生並＝其他ノ諸先生方＝ハ將來モ長ク私達ノ上ニ御慈
愛＝充テツカ強イ御指導ノ手ヲ垂レ賜ハラシコトヲ幾重＝モ
御願ヒ申上げマス。

(12・18受取)