



Title	Freie Gruppeノ構造ノ幾何学的解釋
Author(s)	小松, 醇郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1934, 24, p. 17-21
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73910
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

173. Freie Gruppe, 構造, 幾何學的解釋

小松 醇郎 (阪大)

一ツノ集合体ノ性質ヲソノ *Fundamentalgruppe* ノ構造
カラ特徴ツケ得ル場合が少クナイ、二次元ノ曲面ノ場合ハソ
ノ可符号性、種數 (*geschlecht*) 等ハ一ツノ例デアル、
而シテ之ヨリ逆ニ二ツノ *freie Gruppen*

$$(1) \begin{cases} \text{Erzeugende} & a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p \\ \text{Relation} & \prod_{i=1}^p (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = E \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \text{Erzeugende} & a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_{2p} \\ \text{Relation} & \prod_{i=1}^{2p} a_i \prod_{i=1}^{2p} a_i^{-1} = E \end{cases}$$

ノ *isomorph* が言ヘル。

(W. Threlfall: *Gruppenbilder* 参照)

三次元集合体ノ性質ヲ *Gruppe* ノ構造カラ明ニスルコトハ
甚ダ複雑ナ問題デアルが先ツ H. Kneser ノ定理ヲ簡單ニ証
明スル。

此ノ定理ハ H. Kneser が *Jahres. der. Dent. Math. Verein.* Bd. 38 デ試ミタモノデアルガ、ソノ証明ハ當
時ホダ *Vermutung* デアッタ Dehn ノ *Lemma* ヲ用
ヒタノミナラズ、ソノ冗長難解ニ至ツテハ天下一品デアル。

定理ソノモノハ然シ私が本紙、數、談、會ノ15号ヲ試ミタ
 Dehnsches Lemma ノ証明ガ正シク又 Kneser ノ証明
 ガ正シケレバ正シカッタ筈ノモノデアアル。今此処デハ全ク
 別ニ Dehnsches Lemma ヲ用ヒズニ証明スル。

Kuroschi, Isomorphiesatz (Freie Produkte
 von Gruppen. Math. Ann. Bd. 109) ヲ利用スルガ
 コレガモット簡單ニ出來ルナラ有難イワケデアアル。誤ヲ記シ
 テハ居ナイト思フガ不備ノ点ヲバ御教示願ヒマス。

定理. 三次元閉集合体, Fundamentalgruppe がニツ
 , Untergruppe, freies Produkt ニ分タレ
 ナラバ其ノ集合体ハ二次元球面デニツニ分タレ、ソノ各
 々ノ Fundamentalgruppen ハ分タレタニツノ
 Untergruppen ニ夫々 isomorph デアル様ニ出
 來ル。

此ノ逆ハ明カデアレカラ是ガ或意味デ幾何學的性質ヲ特徴付
 ケル。

証明. M^3 ノ種數 p トスレバ、種數 p ノニツノ Vollbrezeln
 $\Sigma_1^3, \Sigma_2^3 =$ 分タレ、夫々ノ準備曲面 F_1, F_2 ソノ上
 ノ標準切断線

$$\gamma_i', \mu_i' \text{ in } F_1 \text{ 且 } \gamma_i' \text{ homotop } 0 \text{ in } \Sigma_1^3.$$

$$S_i', t_i' \text{ in } F_2 \text{ 且 } t_i' \text{ homotop } 0 \text{ in } \Sigma_2^3.$$

$$(i=1, 2, \dots, p)$$

トシ、 $F_1 \rightarrow F_2$ へ、topologische Abbildung γ

$$(1) \begin{cases} \gamma'_i = \pi_{r_i}(S, t) \\ u'_i = \pi_{s_i}(S, t) \end{cases}$$

トス。Definierende Relationen der Fundamentalgruppe von M^3

$$E = \pi_{r_i}(S, E) \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

ヲ次ノ規則ニ從ツテ Klasse = 余ケル。

一ツノ Relation ノ中ニ Erzeugende s_i, s_k ($i \neq k$)
ガ表ハレル (trivial, Reduktion $s_i s_i^{-1}$ ヲ除イテ)
ナラバ s_i 及ビ s_k ヲ Wesentlich = 含ム Relationen
ヲ凡ソ一ツノ Klasse = 入レル。

異ル Klasse ノ中ノ Relationen ノ中ニハ決シテ等
シイ Erzeugende ハ表ハレナイ。

尚 Relationensystem ; 中ヲ "elementare
Transformation" ヲ行ヒ此ノ Klasseneinteilung
ヲ出來ルダケ細ク選ス。

斯クテ Erzeugende s_i 及ビ Relationen ; Klasse-
neinteilung ガ出來、一ツノ Klasse ガ一ツノ Unter-
gruppe ヲ定義シ、ソコニ含マレル Erzeugende ガ
Untergruppe, Erzeugende ナアル。

F_2 = テ一ツノ Klasse = 表ハレル Erzeugende s_k
凡テ、Henkel ヲ他ノ部分ト切り離ス E_2^2 ヲ考ヘル。 E_2^2 ハ

Σ_2^3 ヲニ分シ E_2^2 ト F_2 トノ交線 S_2 ハ F_2 ヲニ分スル。

$F_1 \rightarrow F_2$ ノ *Abbildung* ハ *topologisch* デアルカラ S_2 ノ F_1 上ノ *Urbild* S_1 ハ F_1 ヲニ分レ夫々 F_2 ノニ分サレタ部分 = *homöomorph*、從ツテ S_1 ハ F_1 上デ *homolog 0*。

次ニ Σ_1^3 ヲ $F(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) ノ *stetige Schar* トシ $F(1) = F_1$, $F(0)$ ハ *Ausarten* シタ曲面即チ Σ_1^3 内ノ一点 Q ヲ通ル巾個 (種数) ノ内トスル。即チ Σ_1^3 デ $F(1)$ ガ $F(0) = \text{homotop}$ 。

$F(1)$ ハ $F(t)$ ($t > 0$) = *homöomorph* デ *topologische Deformation* デ移レル、然ラバ S_1 ハ $S_1(t)$ ナル閉曲線 = 移リ又 $F(t)$ ヲニ分スル、凡テノ t デニ分サレタ各々が *Deformation* デ移ツタ空間部分ハ互ニ *separate* サレ兩者ハ併セテ Σ_1^3 ヲ作ル。

而シテ兩者ノ境ハ S_1 ガ *homotop 0* = ナル部分デアルカラ一ツノ *Elementarfläche* デアル。

但シ $F(0)$ ノ曲線 = 沿ヒ切スル部分が出テ來ルコトモアラウガ S_1 ハ $F(1)$ デ *homolog 0*。即チ $S_1 = \Pi(\gamma, \mu)$ ト表サレテモ γ ト共ニ γ^{-1} , μ ト共ニ μ^{-1} が必ず表ハレテ居ル、從ツテ S_1 ガ $F(0)$ = 至ルトキ *even number* ノ *branch of plane* ガ $F(0)$ デ切スルタケズカラツレノ変形デ切點ヲ離レシメ得ル。

又 S_1 が $S_1(0) = \text{ナルトキ点 } Q \text{ヲサケ得ルハ明カデアル。}$

此、Elementarfläche τE , τ 表ハセバ $E_2 \text{ ト } E_1$, $\text{トヲ } S_1$,
ガ合セタ S^2 ハ球面 = homöomorph. 且ツ M^3 τ ニ分スル。
且ツツ、fundamentalgruppe ハ一方ハ始メノーツノ
Klasse, Untergruppe = isomorph デアル。

fundamentalgruppe, 任意, freies Produkt
= 合ケル Untergruppe $\in$ Kurosch, Isomorphie-
satz = ヨレバ、上述、Klasseneinteilung = ヨル
Untergruppe, freies Produkt τ isomorph デ
アルカラ定理ハ完了。

次 = M^2 が球面デナク種数 p の曲面デニ分サレル場合ノ
証明ヲ求メル、デアルガ。此ノ場合 = ハ Kurosch, Satz
ヲ Freie Produkte mit vereinigten Unter-
gruppen ノ場合 = 擴張セネバナラナイ。且ツ vereinigt
サレタ Untergruppe ハ Erzeugende $2p$ 個。

$$a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p$$

Relationen:
$$\prod_{i=1}^p a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = E$$

ナル最始 = 出シタ freie Gruppe mit Relation デス。
此、freie Produkt, Gruppe = 對スル Isomorp-
hiesatz ガ少々面倒デアルシ幾何學的ノ性質 = 對應付ケル
トキ Heegaard Diagramm ダケデハ成功シナイノ
デ行止リノ状態デス。