75. Beurling ノ定理ノ應用例

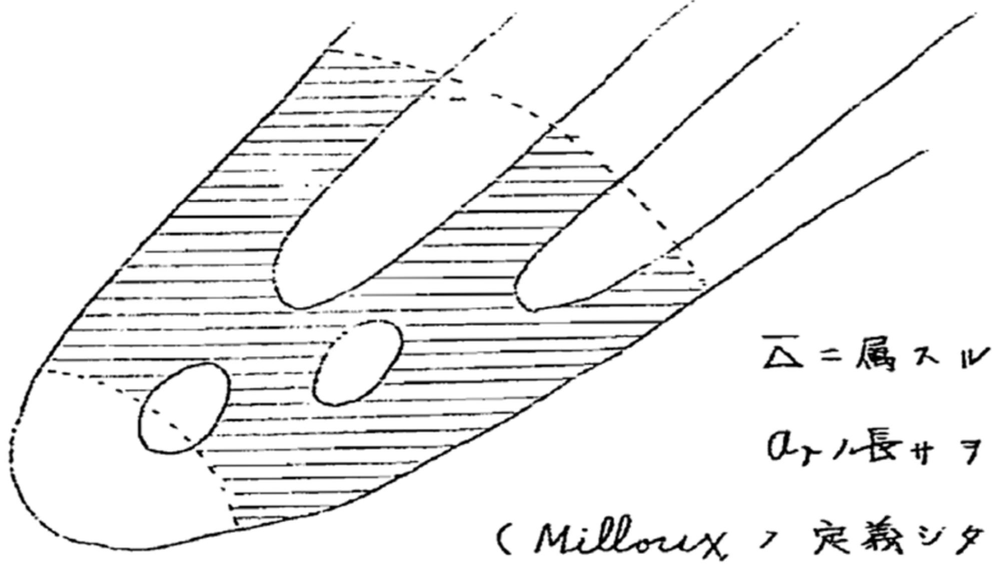
吉田耕作（阪大）

第九号ニ於テ筆者ノ紹介シタ A. Beurling ノ Thése ガ函数論ニ於ケル近來ノ大収穫ナルコトハ何人モ異存ノナイコトト信ジマス。Beurling ガ Denjoy ノ豫想ヲ証明シタ方法ヲ殆ンド其ノ儘デ H. Milloux ノ domaine de determination infini des fonctions entières ニ關スル結果（Acta 61）ガ得ラレルコトヲ次ニ示シタイト思ヒマス。後ニ述ベル様ニ Milloux ノ結果ヨリ稍一般ニナッテヰル様ニ思ヒマス。

有理型函数 $y=f(x)$ ノ逆函數 $x=g(y)$ ノ一ツノ分枝 $x=g_i(y)$ ヲ $|y|>C$ ノ内部ニ於テ凡ユル方法デ fortsetzen スルトキ得ラレル Wertbereich（x平面）ハ單葉ナ連結セル領域ニナリマス。$f(x)$ ハΔノ周上デ $|f(x)|=C$, 内部デ

ハ$|f(x)|>C$ヲ満足シマス。

今△ノ周ノ中ニハ∞ニノビタモノガ少クトモ一ツアルト假定シマス。モシ閉デタ周ガアレバ此内部デハ$f(x)$ハ$|y|<C$ナルyノ値ヲ全テ同回數丈トリマス。△ニ斯ル閉デタ周ノ内部ヲモツケ加ヘテ得ル單一連結領域ヲ$\overline{\Delta}$トシマス。



原点ヲ中心トスル円周$|x|=r$デ$\overline{\Delta}$ヲ切ルトキ此ノ周上ノ点デ$\overline{\Delta}$ニ属スルモノノ集合ヲa_r; a_rノ長サヲ$r\theta(r)$トシマス（Milloux ノ定義シタ$r\theta(r)$ヨリモ短イ）。

$\overline{\Delta}$ト$r_0<|x|<r$トノ共通集合ヲ$\overline{\Delta}_{r_0 r}$, $\Delta_{r_0 r}$ノ内部ノ点xヲトリxガ0ニナル様ニ$\overline{\Delta}_{r_0 r}$ヲ單位円$|X|<1$ニ schlicht ニ寫シマス。コノトキ$a_r$ノ Bild ノ長サ

$$\omega(x, a_r, \Delta_{r_0 r})$$

ハ Beurling ノ定理（第9号参照）ニヨリ

$$\text{(1)} \qquad \log\frac{1}{\omega} \geq \frac{\pi\left(\log\frac{r}{|x|}\right)^2}{\int_{r_0}^{r}\theta(r)\,d\log r} - 1$$

借上ノ等角寫像ニヨリ函數$f(x)$ハ$F(X)$ニ変換サレマス。

今$\max\limits_{|x|=r}|f(x)|=M(r)$トヲケバ，函數

$$G(X)=\frac{F(X)-\alpha}{M(r_0)}, \quad |\alpha|<C$$

ハ$|x|=1$ 上ω=於テハ$|G(x)|\leqq \dfrac{M(r)+|\alpha|}{M(r_0)}$， 其以外ノ部分デハ $|G(x)|\leqq 1+\dfrac{|\alpha|}{c}$ ヲ満足スル。ヨツテ$|x|\leqq 1$ 及ビ $G(X)$ =Jensen ノ公式ヲ apply スレバ (1) = ヨリ次ノ定理が得ラレマス。

$$\boxed{\begin{aligned}&\log\frac{\log\dfrac{M(r)+|\alpha|}{M(r_0)}}{\log\dfrac{|f(x)-\alpha|}{M(r_0)}-\log\left(1+\dfrac{|\alpha|}{c}\right)+N(\bar{\Delta}_{r_0r};\alpha)-N(\bar{\Delta}_{r_0r};\infty)}\\&\geqq\frac{\pi\left(\log\dfrac{r}{|x|}\right)^2}{\displaystyle\int_{r_0}^{r}\theta(r)\,d\log r}+\log 2\pi-1\end{aligned}}$$

但シ $N(\bar{\Delta}_{r_0r};\alpha)$ ハ $\bar{\Delta}_{r_0r}$ =属スル α-point ノ個数ノ logarithmic integration (X-plane デ積分シテル)

Milloux ノ結果(前出)ノ A. Speiser が Julia ノ定理ヲ使ツテ出シタ結果 (Commentarii Helv. I, 1931) 等が全テタヤスク上ノ定理カラ得ラレマス。筆者ハ上ノ定理ニ於ケル

$N(\bar{\Delta}_{r_0r};\alpha)$

ノ如キ量ノウマイ取扱ヒが出来タラΔノ内部ニアル閉デタ周ノ個数ニツイテノ何ラカノ Aussage が出来ルンデヤナイカト思ヒマス (Milloux paper デハコウ云フモノハ問題ニシテヲラナイノデドウヤツタラヨイカ筆者ニハ分ラナイノデスが)。此点御教示ヲ得レバト思ヒマス。尚此他ニモ Beurling ノ Thése カラハ色々ノ結果が得ラレルコトト思ヒマスが。

——— o ———