



Title	距離空間ニ於ケル曲線ノ長サ，強半連續曲線函數ニ就テ
Author(s)	南雲， 道夫
Citation	全国紙上数学談話会． 1935， 25， p. 1-10
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73998
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

76. 距離空間ニ於ケル曲線ノ長サ, 強半連続 曲線函数ニ就テ

南雲 道夫 (阪大)

Hilbert & Tonelli 等ニヨツテ変分學ニモタラサ
レタ直接法ノ考ヘ方ヲバ, 距離空間ニ於テ應用シテ見度ク思
ヒマス。即チ半連続曲線函数等ト云フ考ヘヲ, 距離空間ニ結
ビ付ケテ見ルノデス。(之等ノ概念ハ下ニ説明シマス)。未ダ
少シシカ出來テヤマセン。ソノ上平素甚ダ文献ニ暗イノデ,
或ハ己ニ充分ヨク研究サレテキルコトヲ知ラズニ居レノカモ
知レマセン。識者ノ御教示ヲ乞フテ止ミマセン。

§ 1. 距離空間ニ於ケル曲線ノ長サ(最短曲線ノ存在)

1) 距離空間トハ, 之ニ属スル任意ノ二点 P, Q = 對シ距
離 $\rho(P, Q)$, 即チ次ノ三ツノ性質ヲ有スル實數 ρ が與ヘラレ
テアル集合ノ事デアアル。

(1) $\rho(P, Q) \geq 0$, 丁度 $P=Q$ ノ時ニ限リ $\rho(P, Q)=0$.

(2) $\rho(P, Q) = \rho(Q, P)$ [對稱性].

(3) $\rho(P, Q) + \rho(Q, R) \geq \rho(P, R)$ [三角不等式].

以上ノ性質ヲ有シ且ツ *Vollständig* (*Cauchy*ノ
收斂條件ヲミタス点列ガ $\mathcal{R}$ ニ属スル極限点ヲ持ツコト) ナ空
間ヲ $\mathcal{R}$ デ表ハスコトニスル。 $\mathcal{R}$ ハ尚ホ *Zusammenhän-*
gend 即チ $\mathcal{R}$ ニ属スル任意ノ二点ハ連続曲線 ($\mathcal{R}$ 内)ノ

ヲ結ベルモノトスル。

2) $\mathcal{R}$ ニ於ケル曲線 $\mathcal{C}$ ノ長サトハ; $\mathcal{C}$ ガ連続函数 $P(t)$
($0 \leq t \leq 1$) ($P \in \mathcal{R}$) デ表ハサレルモノトスル時 (普通ノ
曲線ノ長サト同様ニ)

$$L[\mathcal{C}] = \sum_{\nu=1}^n \rho(P_{\nu-1}, P_{\nu}) \text{ノ上限}$$

ニヨツテ定義スル。但シ $P_{\nu} = P(t_{\nu})$; $t_0 = 0, t_{\nu-1} < t_{\nu}, t_n = 1$.

之カラ *Jordan*(?) ノ長サト殆ドスベテガ同様ナルコ
トガワカル。尚ホ以上ノ定義デケカラ容易ニ $L[\mathcal{C}]$ ノ半連続
性 (ノミチラズ強半連続性)、從ツテ最短曲線ノ存在ガ証明
出來マス。

3) $L[\mathcal{C}]$ ノ下半連続性トハ,

$$\mathcal{C}' \Rightarrow \mathcal{C} \text{ノ時, } \lim L[\mathcal{C}'] \geq L[\mathcal{C}].$$

ナルコトヲ云フ。

(嚴密ナ定義ハ茲ニ略ス)

尚ホ $L[\mathcal{C}]$ ハ強ク下半連続デアアル。ソノ意味ハ $\mathcal{C}$ ガ
 $\mathcal{C}'$ ノ $\delta(\varepsilon)$ 近傍ニ含マレル時^{*} (但シ $\mathcal{C}'$ ハ一定)

$$L[\mathcal{C}'] \geq L[\mathcal{C}] - \varepsilon$$

トナル事デアアル。

(^{*} 正確ニ言ヘバ $\mathcal{C}$ 上ニ全ク任意ノ有限個ノ点 $P_1, \dots, P_n$
ヲ ばらめた一列ノ順序ニ取レバ、之ニ對シ $\mathcal{C}'$ 上ニ εばら
めた一列ノ順序ニ $P'_1, \dots, P'_n$ ナル点ガ $\rho(P_{\nu}, P'_{\nu}) < \delta(\varepsilon)$
ナル様ニ存在スルコト)

(証明)

先づ $L[C]$ の定義カラ

$$\sum_{\nu=1}^n \rho(P_{\nu-1}, P_{\nu}) > L[C] - \frac{\varepsilon}{2}$$

ナル C 上ノ点 $P_0, P_1, \dots, P_n$ が存在スル。之レニ對シ

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4n} \text{ トスレバ}$$

$$\rho(P_{\nu}, P'_{\nu}) < \frac{\varepsilon}{4n}$$

ナル $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ が C' 上ニ存在スル。從ツテ

$$\sum_{\nu=1}^n \rho(P'_{\nu-1}, P'_{\nu}) > \sum_{\nu=1}^n \rho(P_{\nu-1}, P_{\nu}) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

所ガ

$$L[C'] \geq \sum \rho(P'_{\nu-1}, P'_{\nu}).$$

故ニ

$$L[C'] \geq L[C] - \varepsilon \quad (\text{証明了})$$

4) Kompakt + $\mathcal{R}$

次ニ最短曲線ノ存在定理ヲ論ズルタメ $\mathcal{R}$ ハ尚ホ Kompakt デアルト假定スル。 $\mathcal{R}$ が Kompakt トハ $\mathcal{R}$ ノ任意ノ無限部分集合ハ少クトモ一ツ $\mathcal{R}$ ニ属スル集積点ヲ持ツコトヲ云フ。例ヘバ n 次元ノ有界ナ開集合ハ Kompakt ナ空間ヲ作ル。
(Weierstrass-Bolzano, 定理ニヨル)

Lemma. $\mathcal{R}$ が Kompakt ナラバ, $L[C] \leq M$ (M ハ一定ノ正ノ數) ナル様ナ C ノ集合 $\{C\}$ モ亦 Kompakt デアル。

($\ast \{C\}$, 任意, 無限部分集合 $\{C\}' \wedge C_n \Rightarrow C_0 \in C$ ナル
様ナ曲線列 $\{C_n\}$ ヲ含ム)

(証明)

$$S = \frac{L[C_{P_0, P(t)}]}{L[C]}$$

ヲバセ, 代リニ曲線 C , パラメーターニ選ベバ ($0 \leq S \leq 1$),

$\rho(P(S_1), P(S_2)) \leq M |S_1 - S_2|$ ナルコトガワカル。従ッテ

Ascoli-Argela ノ定理 (一様有界且ツ *gleichartig stetig* ナ函数集合カラ一様収斂ナル函数列が選ビ出ルコト) ニヨリ

$$C_n \Rightarrow C_0 \text{ ナル } \{C_n\} \subset \{C\}'.$$

$C_0 \in \{C\}$ ハ $L[C]$ が下ニ半連続ナルコトガワカル。

5) 最短曲線ノ存在

$L[C]$ ノ半連続性ト上ノ *Lemma* ニヨリ $\mathcal{R}$ が *Kompakt* ナラバ最短曲線ノ存在スルコトが容易ニ証明出來ル。

之ニヨリ球面ヤ、ドーナツ面等ノナメラカナ閉曲面ニ於テハソノ任意ノ二点ヲ通り最短曲線が存在スルコトハ明ラカデアアル。(此ノ初等的ナ場合ノ二点間ノ距離トハ、ソノ二点ヲ結ブ線分ノ長さノコトデアアル) 所ガ $\mathcal{R}$ ハ *Zusammenhängend, Vollständig Kompakt* ガケテ假定シテキルノデアアルカラ、最短曲線ノ存在ハ可ナリ一般的ナ曲面 (但シ有限ナ長さノ曲線が存在スル様ナ) ニツイテ成立スルモノデアアル。

6) 測地的空間

$\mathcal{R}$ が測地的トハ、 $\mathcal{R}$ ノ任意ノ二点 P, Q = 對シテ、丁度

$$L[C_{P,Q}] = \rho(P, Q)$$

ナル様ナ P, Q ヲ結ブ曲線 $C_{P,Q}$ (勿論最短曲線) が存在スル事ヲ云フ。

一般ニ $\mathcal{R}$ = 属スル任意ノ二点ヲ結ブ最短曲線が存在スル時、ソノ最短曲線ノ長サヲ、ソノ二点間ノ距離トシタ空間ハ測地的空間デアアル。

$\mathcal{R}$ が測地的ナルタメノ必充條件ハ; $\mathcal{R}$ ノ任意ノ二点 P, Q = 對シ

$$\rho(P, R) = \rho(R, Q) = \frac{1}{2}(\rho(P, Q))$$

ナル点 R (P, Q ノ中点) が $\mathcal{R}$ = 存在スルコトデアアル。(証明ハ容易・3), 4) ヲ用ヒズニ出來ル)

§2. 強半連續曲線函數ト半距離

§1 = 於ケル曲線ノ長サ $L[C]$ が強下半連續曲線函數ナルコトハ已ニ証明シタ。次ニ一般ニ強下半連續ナ曲線函數 $F[C]$ ヲ研究シヨウ。

即チ一般ニ強下半連續ナ曲線函數ハ、距離ヲ更ニ一般化シタ 半距離 = ヨツテ定義サレルコトハ、曲線ノ長サが距離ヲ本トシテ定義サレルノト同様デアアルコトヲ示ス。次ニ此ノ考ヘヲ應用シテ、最小値曲線ノ存在ヲ論ジタイガ、未ダ一般的ニハ出來マセン。(半距離が正ナル場合ダケシカ)

1) 曲線函数 $F[C]$

先ッ R 内ノ曲線 C ノ集合 $\{C\}$ が次ノ性質ヲ有スル
モノトスル。

(i) R ノ任意ノ二点 P, Q ヲ両端トスル曲線 $C_{P,Q}$ が $\{C\}$
ニ存在スル。

(ii) $C_{P,Q} \in \{C\}$ 且ッ $C_{Q,R} \in \{C\}$ ナラバ

$$C_{P,R} = C_{P,Q} + C_{Q,R} \in \{C\}$$

(iii) $C_{P,Q} \in \{C\}$, R が C 上ノ点ナラバ

$$C_{P,R} \in \{C\}, \quad C_{R,Q} \in \{C\},$$

$$\text{但シ } C_{P,R} + C_{R,Q} = C_{P,Q}.$$

次ニ $\{C\}$ デ定義サレタ $F[C]$ が下ノ條件ヲ満タサネバナラ
ナイ。

(i) $F[C] = \text{實数 (有限)}.$

(ii) $F[P] = 0$ C が只一点ヨリ成ル時。

(iii) $F[C_{P,Q} + C_{Q,R}] = F[C_{P,Q}] + F[C_{Q,R}].$

2) $F[C]$ ノ強下半連続性

$\{C\}$ ハ (i), (ii), (iii) ノ他ナホ次ノ性質ヲ有スルモノトス
ル。

(iv) δ ヲ任意ノ正ノ数トスル時 $C_0 =$ 對シ, C_0 テバ δ 近
傍内ニ含ム様ナ C' が常ニ $\{C\} =$ 存在スレバ, C_0 ハ
 $\{C\}$ ニ属スル。

(※ 3) ノ説明参照)

サテ以上ノ様ナ $\{C\}$ デ定義サレタ $F[C]$ が下ニ強半連続デ

アルトスル。即ち上ノ (iv) = 述べタ様ナ $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}'$ = ツイテ常 =
 $F[\mathcal{C}'] \geq F[\mathcal{C}_0] - \varepsilon$.

但シ ε ハ任意ノ正ノ數、 δ ハ = 從ツテ決定サレル正ノ數デ
 アル。一般 = $P, Q \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}_{P,Q} \subset \mathcal{C}$ ナラバ $F[\mathcal{C}_{P,Q}]$ ハ P, Q =
 ツキ連続デアル。

3) $g(P, Q)$ ノ定義

$$g(P, Q) = F[\mathcal{C}_{P,Q}] \text{ ノ下限}$$

= ヨツテ $g(P, Q)$ ヲ定義スル。(上ノ下限トハ P, Q ヲ結ブ
 $\{\mathcal{C}\}$ ノアラエル曲線 = ツイテノ下限デアル) シカラバ $g(P, Q)$
 ハ次ノ性質ヲ有ス。

$$(1) \quad g(P, Q) = \text{有限ナ實數.}$$

$$(2) \quad g(P, P) = 0.$$

$$(3) \quad g(P, Q) + g(Q, R) \geq g(P, R)$$

$$(4) \quad g(P, Q) \text{ ハ } P, Q = \text{ツキ下} = \text{半連続デアル.}$$

然シ $g(P, Q) = g(Q, P)$ ハ一般 = ハ成立シナイ。

(3) ハ $F[\mathcal{C}]$ が下 = 半連続ナルコトヲ假定セズトモ成立スル
 (ソノ値が有限デサヘアレバ) 又 (1) ト (2) トハ同等デアル。

$F[\mathcal{C}]$ が下 = 強半連続ナコトカラ (2) が成立、随ツテ (1) モ成
 立スル。

4) $g(P, Q)$ ト $F[\mathcal{C}]$ トノ關係

今 $\mathcal{C}$ が $P(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) デ表ハサレルモノトシ

$$\Gamma[\mathcal{C}] = \sum_{\nu=1}^n g(P_{\nu-1}, P_{\nu}) \text{ ノ上限 } \left(\begin{array}{l} P_{\nu} = P(t_{\nu}), t_{\nu-1} < t_{\nu} \\ t_0 = 0, t_n = 1 \end{array} \right)$$

ニヨツテ $\Gamma[\mathcal{C}]$ ヲ定義スレバ

$$\Gamma[\mathcal{C}] = F[\mathcal{C}].$$

(証明)

先ヅ $g(P, Q)$ ノ定義カラ

$$F[\mathcal{C}] = \sum_{\nu=1}^n F[\mathcal{C}_{P_{\nu-1}, P_{\nu}}] \cong \sum_{\nu=1}^n g(P_{\nu-1}, P_{\nu})$$

故ニ $\Gamma[\mathcal{C}]$ ノ定義ニヨリ

$$F[\mathcal{C}] \cong \Gamma[\mathcal{C}].$$

次ニ $\Gamma[\mathcal{C}]$ ノ定義カラ、任意ノ正ノ數 ε ニ對シテ

$$\Gamma[\mathcal{C}] - \frac{\varepsilon}{3} > \sum_{\nu=1}^n g(P_{\nu-1}, P_{\nu})$$

ナル $P_1, \dots, P_{n-1}$ ガ $\mathcal{C}$ 上ニ存在スル。此ノ際 P_{ν} ハ (3)ニヨ

リ $\mathcal{C}$ 上ニ如何ホドサモ細カク取ルコトが出来ル。ソコデ $g(P, Q)$

ノ定義ニヨリ

$$g(P_{\nu-1}, P_{\nu}) - \frac{\varepsilon}{3n} > F[\mathcal{C}'_{P_{\nu-1}, P_{\nu}}]$$

ナル $\mathcal{C}'$ ガ存在スル。 ($\mathcal{C}' = \mathcal{C}'_{P_0, P_1} + \dots + \mathcal{C}'_{P_{n-1}, P_n}$) 從ツテ

$$\Gamma[\mathcal{C}] - \frac{2}{3}\varepsilon > F[\mathcal{C}'].$$

所ガ $F[\mathcal{C}]$ ガ下ニ強半連続ナルカラ、 P_{ν} ヲ $\mathcal{C}$ 上ニ充分細

カクトレバ

$$F[\mathcal{C}'] > F[\mathcal{C}] - \frac{1}{3}\varepsilon.$$

故ニ $\Gamma[\mathcal{C}] > F[\mathcal{C}] - \varepsilon$

從ツテ ($\varepsilon \rightarrow 0$ ノ時) $\Gamma[\mathcal{C}] \geq F[\mathcal{C}]$.

カクテ結局 $\Gamma[\mathcal{C}] = F[\mathcal{C}]$ (証明了)

5) 半距離 $\gamma(P, Q)$

一般に $\mathcal{R}$ 上に於て γ の $g(P, Q)$ と同様な性質ヲ有スル量 $\gamma(P, Q)$ ヲ P, Q 間ノ半距離ト名ヅケル。即チ $\gamma(P, Q)$ ハ $\mathcal{R}$ ノ任意ノ二点 P, Q = ツイテ定義サレタ、次ノ性質ヲ有スル量ナル。

$$(1) \quad \gamma(P, Q) = \text{有限ノ實數}$$

$$(2) \quad \gamma(P, P) = 0$$

$$(3) \quad \gamma(P, Q) + \gamma(Q, R) \geq \gamma(P, R)$$

$$(4) \quad \gamma(P, Q) \text{ ハ } P, Q = \text{ツキ下} = \text{半連続ナル。}$$

故テ半距離 $\gamma(P, Q)$ ヲ本ニシテ、曲線ノ長サト同ジ様ニシテ、任意ノ $\mathcal{C}$ = ツキ

$$F[\mathcal{C}] = \sum_{\nu=1}^n \gamma(P_{\nu-1}, P_{\nu}) \text{ ノ上限}$$

= ヨツテ $F[\mathcal{C}]$ ヲ定義スル。

$F[\mathcal{C}]$ ハ先ヅ次ノ性質ヲ有スル。

$$F[P] = 0$$

$$F[\mathcal{C}_{P,Q} + \mathcal{C}_{Q,R}] = F[\mathcal{C}_{P,Q}] + F[\mathcal{C}_{Q,R}]$$

尚ホ $F[\mathcal{C}]$ ハ下 = 強半連続ナル。

(証明ハ $L[\mathcal{C}]$ が下 = 強半連続ナルコトノ場合ト全ク平行ニ出来ル)

6) 最小値曲線ノ存在

次ニ $\mathcal{R}$ 内デ常ニ $g(P, Q) > 0$ ナル場合ニ、二定点 A, B ヲ結ビ $F[\mathcal{C}]$ ノ最小ナラシムル $\mathcal{C}$ が存在スルコトヲ証明シヨウ

$$(\text{証明}) \quad F[C_{A,B}] = g(A,B)$$

ナル $C_{A,B}$ ノ存在ヲ証明スレバヨイ。所が

$$F[C] = \Gamma[C].$$

$$\text{故} = \Gamma[C_{A,B}] = g(A,B)$$

ナル $C_{A,B}$ ノ存在ヲ証明スレバヨイ。

ソレ = ハ常 =

$$g(P,R) = g(R,Q) = \frac{1}{2}g(P,Q)$$

ナル点 R が存在スルコトヲ証明シ、

常 = $g(P,Q) > 0$ ナル場合 = ハ $\lim g(P,Q) = 0$ ナラバ

$g(P,Q) = 0$ ナルコトヲ証明スレバヨイ。

———— (1月6日) ————