



Title	Cartan-角谷-Selberg ノ定理ニ就テ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 25, p. 11-14
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73999
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

17. Cartan—角谷—Selberg, 定理ニ就テ

吉田耕作 (阪大)

有理型函数 $y = f(x)$ 、逆函数 $x = g(y)$ 、Riemann 面 F_y が $|y| = k$ ナル円ヲ切ツタトキ全テ單葉ナル
円 $|y| < k$ が切リトラレルナラバ

$$(1) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, \frac{1}{f})}{\log T(r, f)} \leq 1$$

之が H. Cartan の定理デアル。非常ニ重要ナ結果デアル
が其ノ証明ガ不完全ニ思ハレル。其ノ旨ヲ角谷静夫君ニ話シ
タ所、角谷君ハ直ニ少クトモ $\delta(0) = 0$ ナルコトハ確ニ云
ヘルコトヲ elegant ニ示サレタ (第 19 号)

最近出タ H. Selberg の論文 (Arch. Norske
Videnskaps Akademi i Oslo, 1934) ヲ見
ルト矢張り Cartan の paper ヲ怪シイト思ツタノカ、
証明ヲやり直シテ

$$(1') \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, \frac{1}{f})}{\log T(r, f)} = \text{finite}$$

ヲ得テアル。(1)ニハ達シテヲラナイガ、之ガ 0 = 對スル如何
ナル意味 (Nevanlinna, Valiron 等)、defant $\in 0$
ナコトガ示サレタ譯デアル。尚角谷君ガ第 19 号ニ注意サレタ
如ク、Selberg \in 、 F_y が $|y| = k$ ナ切ツタトキ全テ $y = 0$

ニ於テノ \equiv algebraic = 分岐シタ領域が切リトラレ且ツ其
 分岐位数 = 有限ナ上限ガアルモノト假定 (Cartan, ヨリ廣
 イ) シテ (1)'ヲ証明シテアル。

所ガ筆者ハ先ニ角谷君ノ結果 (第19号)ニ對スル Remark
 トレテ "有理型函数ノ derivative = 就テ" (第21号及ビ
 第23号ニ於ケル其補遺)ヲ出シテヲイタ。之ヲウシク modify
 シテ得ラレル下ノ Lemmaヲ使ヘバ (1)'ノ得ラレルコトヲ
 注意シタイ。

Selbergハ或種ノ Uniformisierungstranscendent
 ヲ使ツテ証明シテアル。筆者ノ Lemmaハ Verzerrungs-
 satzヲ使ツテアル丈ガカラ elementarデアアルノミナラ
 ズ、之カラ E. Ulbrichノ結果モ得ラレルカラ (第21号
 参照) 稍スグレテアルト思ヒマス。

Lemma 有理型函数 $y = f(x)$ ノ逆函数分枝ガ全テ

$|y| < \delta =$ 於テ

$$x - x_i = C_i y^{\frac{1}{\lambda_i}} + d_i y^{\frac{2}{\lambda_i}} + \dots, C_i \neq 0, \lambda_i \geq 1$$

ノ如ク展開出來ルモノトスル。然ラバ之等ノ逆函数分枝ニヨ
 ル $|y| \leq \delta_i < \delta$ ノ Bild $X_i (i = 1, 2, \dots)$ ハ互ニ外ニアル
 且 schlicht ナ閉領域デアアル。各 X_i カラ夫々任意ニ一点
 \bar{x}_i ヲトリ出ストキ

$$(2) \begin{cases} \sum_i \left(\delta^{\frac{1}{\lambda_i}} - \delta_i^{\frac{1}{\lambda_i}} \right) \frac{\lambda_i^2 |f(\bar{x}_i)|^{\frac{\lambda_i-1}{\lambda_i}}}{|\bar{x}_i|^2 |f'(\bar{x}_i)|^2 (\log |C \bar{x}_i|)^4} = \text{收斂} \\ C \text{ハ或常数} \end{cases}$$

証明ハ第21号ト略同様ヲス。

(2) カラ直 = Uniformisierungstranscendentヲ
用ヒテ出シタ Selbergノ結果ト略ミ同ジモノガ得ラレル。

即チ

λ_i ノ上限ヲ λ , $k = \delta > \delta_1 = 1$ トレテ

$$(3) \begin{cases} \log \frac{1}{|f'(x)|} \leq \log|x| + 2 \log \log|cx| + (1 - \frac{1}{\lambda}) \log \frac{1}{|f(x)|} \\ \quad - \log|\delta^{\frac{1}{\lambda}} - 1| + \log|d(x)|, \text{ if } |f(x)| \leq 1 \\ |d(x)| \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow \infty \end{cases}$$

(3) カラ Selberg = 做ツテ (1)ヲ得ルコト次ノ通り:

$$\frac{1}{f} = \frac{f'}{f} \frac{1}{f'} \text{ ナル故}$$

$$m(r, \frac{1}{f}) \leq m(r, \frac{f'}{f}) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|f'(x)|} d\theta$$

$\begin{matrix} |z| \leq 1 \\ |x| = r \end{matrix}$

$$\leq m(r, \frac{f'}{f}) + (1 - \frac{1}{\lambda}) m(r, \frac{1}{f}) + O(\log r)$$

故 = $m(r, \frac{1}{f}) = O(\log r T(r, f))$, 但シ其ノ Total
variation finite ナル如キ r ノ値ヲ除ク。

上ノ証明ヲミレバワカル通り $\lambda = \text{finite}$ デナクトモ
 $|x| = r$ ノ $f(x) = \text{ヨル Bild} = \text{ヨツテ切ラレル円板}$
 $|y| < \delta$ ノ最大連結數ヲ $\lambda(r)$ トスルトキ

$$\log \left| \frac{1}{\delta^{\lambda(r)} - 1} \right|^{\lambda(r)} = O(T(r)^{1-\varepsilon}), \varepsilon > 0 \text{ ナラバ}$$

$\delta(0) = 0$ ハ云ハル。之處 = $\lambda(r) = O(T(r)^{1-\varepsilon_1}), \varepsilon_1 > \varepsilon$

ナラバ充分ナル。同様ノ注意ヲ角谷君が第19号ニ於テサ
レタガ角谷君ノハ

$$\int^r \frac{\lambda(t)^2}{t} dt = O(A(r)^{1-\varepsilon})$$

デアツタカラ、上ノ方が一般ニナツテラルト思ヒマス。

同様ノ方法ヲ逆函数ガ $y=0$ ニ於テ、 \log arithmetic
singularity (sonst regulär für $|y| < \delta$)ヲモツ様
十分枝ヲモツ場合モ取扱ハマスガ煩シイカラヤメテヲキマス。

—— (1月2日) ——