OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | 中野氏ノ論文 Zur Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen ヘノ一瞥 |
| Author(s) | 南雲, 道夫 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 1935, 27, p. 10-16 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/74006 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# 84. 中野氏ノ論文 Zur Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen ヘノ一瞥

南雲道夫（阪大）

昨年ノ日本数學雑報ニ現ハレタ中野秀五郎氏ノ上記ノ論文ハ 70 頁ニ及ブ大論文ナルタメ敬遠シテヰマシタ。最近バラバラト其ノ頁ヲ繰ッテ内容ヲ一寸ノゾイテ見マシタ結果、ソノ前半ノ結果ノ重ナルモノガ次ノ如キモノデアラウト思ハレマス。

$$L_x(y)=\left(\frac{d^n}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots+p_n(x)\right)y=0$$

ナル微分方程式ヲバ；氏ノ所謂 Charakteristische Lösung $\chi(x,t)$ ヲ用ヒルコトニヨリ、Volterra ノ積分方程式論ニ於ケル考ヘ方ト結ビツイテ、ソノ性質ヲ研究スルノガ本論文デアリマセウ。

1] $L_x(y)=f(x)$ ヲ解ク事

之ハ已ニヨク知ラレタ方法ガアリマスガ、中野氏ハ次ノ如キ考ヘ方ヲ用ヒマシタ。

$y(a)=A_0$, $y^{(i)}(a)=A_i$, $(i=1,\cdots\cdots,n-1)$ トシ，

$$\varphi(x,a)=y(x)-\sum_{i=0}^{n-1}A_i\frac{(x-a)^i}{i!}$$ トオク事ニヨリ

上ノ方程式ハ $L_x(\varphi(x,a))=\Phi(x,a)$

ナル形ニ帰着サレマス。（$\Phi(x,a)$ ハ $f(x)$ ト $A_i,(x-a)^i$, 等カラ成立）

$\varphi(x,a)$ ハ $x=a$ ニ於テ $n$ 次ノ零トナル函数デス。

一般ニ $\varphi(x,t)$ ガ $x=t$ ニ於テ $n$ 次ノ零トナル時，即チ

$$\varphi(t,t)=0,\quad \left(\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right)_{x=t}=\cdots\cdots=\left(\frac{\partial^{n-1}\varphi(x,t)}{\partial x^{n-1}}\right)_{x=t}=0$$

ナル函数ヲ中野ノ條件ヲ満タス函数ト呼ビマセウ、シカラバ微分方程式論ヨリ 中野ノ條件ヲ満タス $\varphi(x,t)$ ニツキ

$$L_x(\varphi(x,t))=\Phi(x,t)\quad(\Phi(x,t)\text{ハ任意!})$$

カラ $\varphi(x,t)$ ハ常ニ一義的ニ決定サレマス。ソノ結果ハ Volterra ノ運算

$$\varphi(x,t)=\int_t^x\chi(x,\xi)\Phi(\xi,t)\,d\xi$$

ニヨッテ得ラレマス。茲ニ現ハレタ $\chi(x,t)$ ハ中野氏ノイワユル Charakteristische Lösung ナルモノデ次ノ如ク定義サレマス。

$$L_x(\chi(x,t))=0,\quad[\chi(x,t)\text{ハ}L_x(\varphi)=0\text{ノ積分デアル}]$$

$$\begin{cases}\chi(t,t)=0\\ \left(\dfrac{\partial^i\chi}{\partial x^i}(x,t)\right)_{x=t}=\begin{cases}0 & 1\leqq i\leqq n-2\\ 1 & i=n-1\end{cases}\end{cases}$$

ソコデ任意ノ函数 $\Phi(x,t)$ ニ対シ

$$\mathfrak{K}\Phi(x,t)=\int_t^x\chi(x,\xi)\Phi(\xi,t)\,d\xi$$

ナル運算（Volterra 式運算）ヲ $\mathfrak{K}$ トスレバ，

中野ノ條件ヲ満タス $\varphi(x,t)$ ニツイテ $\mathfrak{K}$ ハ $L_x$ ノ逆運算デアリマス！

〔証明〕 $\varphi(x,t)=\int_t^x\chi(x,\xi)\Phi(\xi,t)\,d\xi$ ニ於テ

$\chi(x,t)$ ガ上ニ定義シタ Charakteristische Lösung トスル時 $L_x(\varphi(x,t))=\Phi(x,t)$ ヲ証明スル。

$i=1,\cdots\cdots,n-1$ デハ順次ニ上ノ式ノ両辺ヲ $x$ ニツキ微分スレバ

$$\varphi^{(i)}(x,t)=\int_t^x \chi^{(i)}(x,\xi)\Phi(\xi,t)d\xi$$

$$\left[\chi^{(i)}(x,\xi)=\frac{\partial^i\chi}{\partial x^i}\right]\quad\left[\chi^{(i-1)}(x,x)=0\ =ヨル\right]$$

又 $$\varphi^{(n)}(x,t)=\Phi(x,t)+\int_t^x \chi^{(n)}(x,\xi)\Phi(\xi,t)d\xi$$

$\left[\chi^{(n-1)}(x,x)=1=ヨル\right]$ 之カラ両辺ニ $p_{n-i}(x)$ ヲ掛ケテ加ヘ合セバ

$$L_x(\varphi(x,t))=\Phi(x,t)+\int_t^x L_x(\chi(x,\xi))\Phi(\xi,t)d\xi$$

所ガ $L_x(\chi(x,\xi))=0$ ナルニヨリ

$$L_x(\chi(x,t))=\Phi(x,t)\qquad(証明了)$$

## 2] Adjungiert ナ方程式

以上ガ基礎デ、ソレカラ種々ナ結果ガ出マスガ、ソノ中ノ目星シイモノノ一二ダケヲ述ベマス。

$\varphi(x,t)$ 及ビ $\psi(x,t)$ ヲバ中野ノ條件ヲ満足スル任意ノ函数トスルトキ

$$(1)\quad \int_{t_1}^{t_2}\left[\varphi(x,t_1)L_x(\psi(x,t_2))-(-1)^n\psi(x,t_2)\tilde{L}_x(\varphi(x,t_1))\right]dx=0$$

ナル関係ガ常ニ成立スルトキ、$L_x$ ト $\tilde{L}_x$ トハ互ニ Adjungiert デアルト云フ。（之ハ普通ニ用ヒラレテヰル定義ト一致スル

コトハ明カデセウ）、シカテバ

$L_x$ = 對スル Charakteristische Lösung ヲ $\chi(x,t)$

トシ

$\tilde{L}_x$ = 對スル Charakteristische Lösung ヲ $\tilde{\chi}(x,t)$

トスレバ

$$\tilde{\chi}(x,t) = -(-1)^n \chi(t,x)$$

トナル。

〔証明〕 $u(x,t)$ ヲ中野ノ條件ヲ満タス任意ノ函数トスルトキ，$L_x$ ト $\chi(x,t)$ トノ関係カラ（互ニ逆トナル）一般ニ

$$u(x,t) = \int_t^x \chi(x,\xi) L_\xi(u(\xi,t))\, d\xi$$

ガ成立スル。故ニ (1) カラ（$\tilde{L}$ = 對シテハ $\tilde{\chi}$）

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{x} \tilde{\chi}(x,\xi)\tilde{L}_\xi(\varphi(\xi,t))L_x(\psi(x,t_2))\,d\xi\,dx$$

$$-(-1)^n\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_2}^{x} \chi(x,\xi)L_\xi(\psi(\xi,t))\tilde{L}_x(\varphi(x,t_1))\,d\xi\,dx = 0$$

茲デ積分ノ順序ヲ変ヘレバ、結局

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_2}^{x}\left\{\tilde{\chi}(x,\xi)+(-1)^n\chi(\xi,x)\right\}L_x(\psi(x,t_2))\tilde{L}_\xi(\varphi(\xi,t_1))\,d\xi\,dx = 0$$

所ガ
$$\left.\begin{aligned} L_\xi(\varphi(\xi,t_1)) &= g(\xi,t_1) \\ \tilde{L}_x(\psi(x,t_2)) &= f(x,t_2) \end{aligned}\right\}$$

ハ全ク任意ノ連続函数トナルカラ

$$\tilde{\chi}(x,\xi) = -(-1)^n\chi(\xi,x).$$

3] Komposition

$L_1$, $L_2$ ナル二ツノ微分運算ヲ結合シタモノ

$$L_3 y = L_2(L_1 y)$$

=對シテハ Charakteristische Lösung ハ Volterra ノ結果トナル。（但シ順ハ逆） 即チ $L_3$ =對スル $\chi_3(x,t)$ ハ

$$\chi_3(x,t) = \int_t^x \chi_1(x,\xi)\chi_2(\xi,t)\,d\xi$$

[証明] $\chi(x,t)$ ヲ Kern トスル Volterra ノ運算 $\mathfrak{L}$ が $L_x$ ノ逆ナルコトヲ考ヘレバ $\chi_3(x,t)$ ハ $\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2$ 相當スル Kern デアル。之レカラ上ノコトハ容易=結論サレル。

4] 上ノ事ノ他 $\chi(x,t)$ ハ $L_x$ カラ一義的=求メラルガ $\chi(x,t)$ ヲ計算シテ出ス方法（Volterra ノ積分方程式ヲ解ク）。 又 $\chi(x,t)$ ガ如何ナルトキ，一ツノ $L_x$ ノ逆トナルカ。 $\chi(x,t)$ ヲ與ヘタトキ、$L_x$ ガ一義的=求メラルコト。 $\chi(x,t)$ ト Wronskian トノ関係等々々。

× × × × ×

以上ハ全ク一瞥デ、中野氏ノ大論文ノ要点=觸レナカッタコトト恐レマス。只銀堀ノ中=ダイヤモンドガ埋モレテ斗レバ其眼ノ士=ハ直チ=ソノ所在ヲ明ラカ=スルコトガ出來マセウガ、愚凡者ハ只ソノ尨大ナル外観=幻惑シテ、ソノ眞髄ガ何処=アルノカ解リマセン。從ッテ銀ヲ取リ除イテダイヤモンドダケヲ取リ出シテ見セテモライ度イノデス。最近同

君ノ第二ノ大論文ガ出マシタ。甚ダ勝手ナガラ同君ニソノ論文ノ最モ大切ナ要点ヲ、簡単ニシカモ平易ニ、本紙上ニ御紹介下サル様御願ヒシテ筆ヲ擱キマス。　（妄言多謝）

---

正誤——— Topologische Gruppe トシテ Lie 氏変換群ニ就テ（第26号）——三村征雄

5頁　7行及ビ8行ニ於テ

$a:k$, $b:k$ トアルハ $a_{ik}$, $b_{ik}$ ノ誤リ

7頁　1行ニ於テ

ソレハ　ハ　ソレヲ　ノ誤リ

---

補遺——— Cartan——角谷——Selberg ノ定理ニ就テ（第25号）———吉田耕作

角谷君ニヨレバ角谷君ノ結果ハ次ノ如ク一般ニ述ベラレルノデアッテ、第25号ニ於テハ筆者ハ其ノ点ヲ見落シテ角谷君ノ結果ヲ御紹介シタ譯デアッタ。コレニ角谷君ニ対シ失礼ビスル次第デアル。

有理型函数 $y=f(x)$ ノ逆函数 $x=g(y)$ ノ Riemann 面 $R_y$ ヲ円 $|y|=k$ デ切ルトキ全テ有限枚ッナガッタ円板ガ切リトラレ（但シ其ノ Branch point ハ $|y|<k_1<k$ ニノミアル。併シ $y=0$ ニ於テノミ分岐スルコトヲ要求シナ

イ。コノ点ガ筆者ノ見落シタ所デス）且ツ $|x|=r$ ノ $f(x)$ ニヨル Bild ニヨッテ切ラレル円板ノ最大連結数ヲ $\lambda(r)$ トスルトキ

$$\int^{r}\frac{\lambda(t)^2}{t}dt=O(A(r)^{1-\varepsilon}),\quad \varepsilon>0$$

ナラバ $\delta(0)=0$.

即チ $\gamma=0$ ニ於テノミ分岐スルト仮定スレバ筆者ノ結果ノ方ガ、ズット精密デアルガ，分岐点ノ位置ヲ指定シナクトモスム所ニ角谷君ノ方法ノスグレタ所ガアッタノデアリマス。

併シ筆者ニハ結局コノ defaut ノ order ノ問題ハ角谷君ノ如キ仮定ノ下ニモ Selberg ト同ジ様ニナルノダト思ヒマス。

筆者ニハマダ証明ガ出来ナイノデスガ，上ノ仮定ノモトニ第24号ノ結果ヲ使フト

$$\begin{cases} N(r,a)=T(r,f)+K(r,a), & |a|=\dfrac{k_1+k}{2} \\ |K(r,a)|\leqq\lambda(r)\left\{m\left(r,\dfrac{f'}{f}\right)+2\log r\right\} \text{ for large } r \end{cases}$$

ガ云ヘルコトト $|y|\leqq k-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ ノ $x=g(y)$ ニヨル Bild ハ互ニ外ニアル開デタ領域ニナルコトトカラ anschaulich ニソウ思ハレルノデス。第24号(3)ニ於ケルヨリモモット精密ナ derivative ノ Abschätzung ガ出来タラ証明出来ルノデセウガ、コノ点御高教ヲ得タイト思ヒマス。　（以上）