



Title	單葉函數ニツイテ
Author(s)	城, 憲三
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 29, p. 5-10
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74011
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

89. 單葉函數ニツイテ

城 憲三 (阪大工)

Ⅰ 單葉函數ノ Bloch 常數 α .

$w = f(z) = z + \dots$ ヲ $|z| < 1$ ニ於ケル正則單葉函數トシ
 z ノ集合ヲ S トスル。 S = 屬スルスベテノ函數 $f(z)$ ノ Bild-
bereich 内ニ全ク含マレ得ル様ナ円ノ半径ノ上限が存在ス
ルガ、ソレヲ Landau = 從ツテ α トスル。 α ハ宇宙常數デ
アル。 Landau ハ Math. Zeitschr. 30, 1929, pp. 608-634
ニ於テ立派ナ計算ノ後

$$(0, 555 <) \frac{9}{16} < \alpha \leq \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

ナル結果ヲ得タ。 α ノ値自身ハ未ダ不明デアル。 上ノ $\frac{\pi}{4}$ ナル
數ハ函數 $f(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$ ガ $|z| < 1$ ヲ $|f(z)| < \frac{\pi}{4}$ = 寫像
スルコトカラ知ツタモノデアル。

Landau ノ計算ハ實ニ妙ヲ得テオレケレドモ、上ニ限
ツタ數 $\frac{\pi}{4}$ = ツイテハ少シ手落チガアル。 シカモ上記論文
p. 615 =

Über α nach oben weiß ich nichts Besseres
als das triviale

$$\alpha \leq \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

ト明言シテオレル。 筆者ハ數年前ニ (2) ノ結果ノヨロシクナイ
コトヲ知ツテオタガ、問題ハ小サイノデ何モ懸表シナカッタ
ガ、最近 America, Bulletin, Abstract =

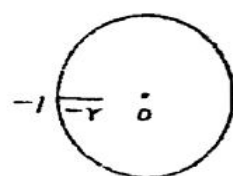
Robinson ト云フ人が $O < \frac{3}{4}$ 等トナリ得ル事實ガケヲ掲
ゲタ (September 24, 1934).

私ハ $O < \frac{3}{4}$ ナルコトノ証明ヲ示シテ見タイ。(尚モッ
ト *scharf* = 限ルコトモ出来ル)

$|z| < 1$ ヲ -1 カテ $-r$ ($0 < r < 1$) マデ線分ノ *cut* ヲ
有スル單位円 (第一圖) = 寫像スル函数ヲ

$h(z)$ トスレバ

$$\frac{h(z)}{[1-h(z)]^2} = p \frac{z}{(1-z)^2}, \quad p = \frac{4r}{(1+r)^2}$$



(第一圖)

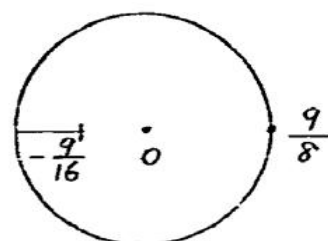
デアル。[Landau, Darstellung und Begründung
einiger neuerer Ergebnisse -----, S. 112-114 参照]

上式カラ

$$h(z) = pz + \dots$$

トナルカラ函数

$$w = H(z) = \frac{h(z)}{p} = z + \dots$$



(第二圖)

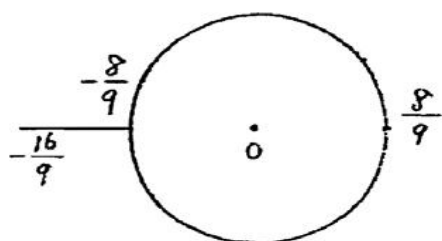
ハ $|z| < 1$ ヲ w -平面ノ半径 $\frac{(1+r)^2}{4r}$, 線分 $-\frac{(1+r)^2}{4r} \dots \dots \frac{(1+r)^2}{4}$ ヲ
cut トスル円内 = 寫像スル。今特ニ $r = \frac{1}{2}$ トスレバ上ノ円ハ
半径 $\frac{9}{8}$, *cut* ガ線分 $-\frac{9}{8} \dots \dots \frac{9}{16}$ トナル。(第二圖)

一般ニ S ノ函数ノ w -平面上ノ取ラナイ開点集合ヲ $\mathcal{M}$

トシ、変換 $\eta = \frac{1}{w}$ デ $\mathcal{M}$ ノ寫ル集合ヲ $\mathcal{M}^{-1}$ トスレバ η -平
面ノ $\mathcal{M}^{-1}$ 外ノ点ハ $\zeta = \frac{1}{z}$ ナル $|\zeta| > 1$ = 寫像サレル。即チ
 $\mathcal{M}^{-1}$ ノ *Abbildungsradius* ハ 1 デアレト云フ。

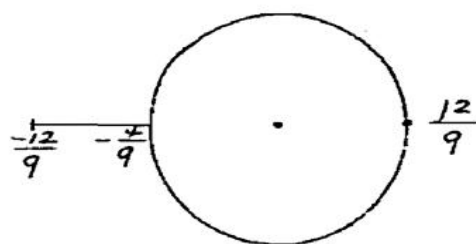
トコロガ *Abbildungsradius* ハ *Translation* = 無関

係デアルカラ今ノ場合、 M^{-1} ハ第三圖デ示サレルモノデアル



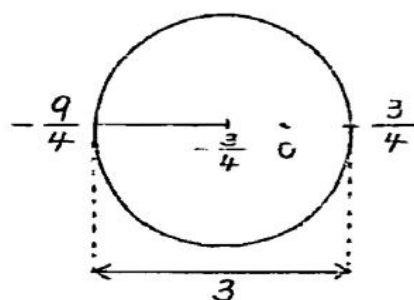
(第三圖)

が、今コレヲ實軸ニ沿ウテ $\frac{4}{9}$ タケ
translate シテ第四圖ノ位置ニシ
テ見ル。



(第四圖)

スルト M ノ圖形ハ第五圖トナル。



(第五圖)

即チ $|z| < 1$ ハ函数

$$\frac{1}{\frac{1}{H(z)} + \frac{4}{9}} = z + \dots$$

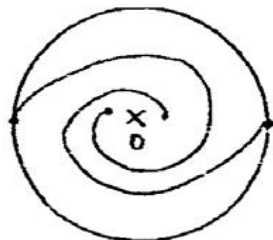
ニヨツテ半径3ナレツノ半径ニ沿
ウタ cut ヲ有スル円内ニ寫像サレル。

ダカラ

$$|z| < \frac{3}{4}$$

デアル。

cut ノ數ヲ澤山考ヘタ円ニ寫像スルコトニヨツテ $|z|$ ヲモ
ット小サナ數デ abschätzen スルコトガ出來ルケレドモソ
レハ述べナイ。恐ラク第六圖ノ様ナ適當ナ Neigungswinkel



(第六圖)

ヲ有スル Logarithmische Spirale ヲ
cut ニ有スル円ヲ考ヘタラ或ハ最上ノ結
果ニ到達スルカモ知レナイが、ソレハマダ
想像デアル。結局 Landau ノ計算ハ益

々偉彩ヲハナツダラウト思フ。

② 係数問題

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, f(z) \in S$$

トシタトキニ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{n} = L$$

トオケバ L ハヌーツノ宇宙常数デアル。 $L=1$ ナルコトハ想像サレテハキルガ Landau が示シタ結果:

$$L < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right)e$$

が現今知ラレタ最高ノ結果デアル。

シカシ、Marty ハ昨年、Comptes Rendus t. 198, pp. 1569-1571ニ於テ $|a_n|$, ($n=2, 3, \dots$)ガ Max. = ナル様ナ函数 $f(z)$ ハ $|z| < 1$ ヲ必ず w -平面ノ外点ヲ有シナイ Schlitzbereich = 寫像シナケレバナラヌトイフコトヲ示シタ。

又 L ヲ abschätzen スル場合ニハ

$$|f(z)| = O\left(\frac{1}{(1-r)^2}\right), \quad r \rightarrow 1 \quad (1)$$

ナルモノノミヲ考フレバ足ル。何トナレバ早ヤ

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = O\left(\frac{1}{(1-r)^{1+\tau}}\right), \quad r \rightarrow 1 \quad (0 < \tau < 1)$$

ナルトキニハ、容易ニ

$$a_n = O(n^\tau)$$

トナルコトヲ示セルカラデアル。Marty = 従ッテ Schlitzbereich = 寫像スルモノデ、シカモ (1)ヲ満足スル様ナ函数ノミヲ考ヘ、尚且ツ Löwner ノ思想ニヨッテ Schlitzkurve

ヲ *regular + kurve* デ *approximieren* スルト考
 ヘルナラバ $f(z)$ ハ $|z|=1$ 上 = 必ず 2 次ノ *Pol* ヲ有スル
 ベキデアルト考ヘル。(之レ = 誤リガアリサウニモ思ヘルケ
 レドモ、コノ点ニツキ特ニ御高教ヲ賜ハリタイモノト思ツテ
 申ル)

筆者ハ数年前カラ次ノ様ニ定理ヲ考ヘテキタ。

定理. $f(z) \in S$ が $|z|=1$ 上ニ一ツノ 2 次ノ *Pol* ヲ
 有シテキテ、 $|z|=1$ 上ノ他ノ点デハ代数的ノ特異点ヲ持
 タナイナラバ

$$\overline{\lim}_{n=\infty} \frac{|a_n|}{n} = L \leq 1$$

デアアル。

証. $\varphi(z) = \sqrt{f(z^2)} = \sum_1^{\infty} b_n z^n \quad (b_1 = 1)$

ハ $|z| < 1$ デ *ungerade + schlichte funktion* デ、
 $f(z)$ ノ 2 次ノ *Pol* ヲ $z=1$ = アリトスレバ $\varphi(z)$ ハ
 $z = \pm 1$ デ 1 次ノ *Pol* ヲ有スル。 $|z| < 1$ 内ノ $z = \pm 1$
 ノ近傍ハ $\varphi(z) = \infty$ 点ノ近傍ヲ一通リ掩フカラ
 (*Schlitzbereich* ノミヲ考フ)。 $|z|=1$ ノ他ノ点ノ特異
 点ノ Order (*Hadamard* ノ意見) ハ *negative* デ
 アル。

$$h(z) = \frac{\varphi(z)}{z} (1 - z^2); \quad \varphi(z) = \frac{zh(z)}{1 - z^2}$$

トオケバ

$h(z)$ ハ $z = \pm 1$ デ *regular* デ且ツ

$$h(z) = 1 + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_{2n} z^{2n} + \dots$$

トオケバ

$$b_{2n+1} = 1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n} \quad (2)$$

デアツテ、且ツ

$$h(1) = \sum_0^{\infty} \alpha_{2n}$$

ハ *conv.* デアル。而シテ $z = r$ ($r > 1$) ナルトキ

$$\varphi(r) = \frac{r h(r)}{1 - r^2}$$

$$= \text{シテ } |\varphi(r)| \leq \frac{r}{1 - r^2} \text{ デアルカラ}$$

$$|h(r)| \leq 1 \quad (3)$$

従ツテ *Abel* の定理ニヨツテ $r \rightarrow 1$ ヲ考ヘルト

$$\lim_{r \rightarrow 1} h(r) = h(1) = 1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n} + \dots$$

デアルが (3) ニヨツテ

$$\left| \sum_0^{\infty} \alpha_{2n} \right| \leq 1$$

ヲ得ル、故ニ (2) ニヨツテ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |b_{2n+1}| \leq 1$$

デアル。コレガ云ヘルト

$$\overline{\lim}_n \frac{|a_n|}{n} \leq 1$$

ヲ証明スルコトハ容易デアル (*Landau* の計算ヲ *modify* スル)

御批判ヲ賜リタイモノデアル。

—— (終り) ——