



Title	函数ノ單葉性（多葉性）ニツイテ
Author(s)	木村, 邦五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 30, p. 1-6
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74012
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

90. 函数ノ單葉性(多葉性)ニツイテ

本村 邦五郎 (東京物理學校)

能代氏ハ本誌 18 号デ “ $f(z)$ ヲ凸狀領域 D デ正則デ且ツ
 $\Re(e^{i\alpha} f'(z)) > 0$ (α ハ或ル實常數) ナラバ $f(z)$ ハ
 D デ單葉デアル” ト云フ定理ノ簡單ナ証明法ヲ紹介サレタ。
 コノ方法ニ少シノ工夫ヲ加ヘテ見タラ次ニ述ベル様ナ結果ガ
 出マシタ。

定理 1. $f(z)$ ハ凸狀領域 D デ正則デ且ツコノデ

$$\Re(e^{i\alpha} f^{(p)}(z)) > 0 \quad (\alpha \text{ ハ或實常數, } p \text{ ハ正整数})$$

ナラバ $f(z)$ ハ D デ高々 p 葉デアル。

上ノ定理ヲ証明スルノニ次ノ補助定理ヲ用ヒル。

補助定理 $f(z)$ ハ凸狀領域 D デ正則トシ、 $z_1, z_2, \dots, z_{p+1}$

ガ D = 属スルトキ

$$\Delta_0(z_1) = f(z_1), \quad \Delta_1(z_2, z_1) = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}, \dots$$

$$\Delta_p(z_{p+1}, z_p, \dots, z_1) = \frac{\Delta_{p-1}(z_{p+1}, z_{p-1}, \dots, z_1) - \Delta_{p-1}(z_p, z_{p-1}, \dots, z_1)}{z_{p+1} - z_p} \quad (p=1, 2, \dots)$$

トスレバ (除數 = 0 ナルトキハ勿論ソノ極限值ガ存在
 スルカラコノ極限值 = 等シイモノトスル)

$$\Delta_p(z_{p+1}, z_p, \dots, z_1) = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f^{(p)} \{ z_1 + (z_2 - z_1)t + (z_3 - z_2)t_1 + \dots \\
 \dots + (z_{p+1} - z_p)t_1 \dots t_{p-1} \} t^{p-1} t_1^{p-2} \dots t_{p-2} dt dt_1 \dots dt_{p-1}$$

ガ成立スル。但シ $t_0 = t$ トスル、勿論 $f^{(p)}$ ノ括弧内ノ
 点ハ D = 属ス。

証明. 今 $Z_2 \neq Z_1$ が $D =$ 属ストセバ線分 Z, Z_2 即ち

$Z = Z_1 + (Z_2 - Z_1)t, \quad 0 \leq t \leq 1$ が $D =$ 属ス故

$$\begin{aligned} f(Z_2) - f(Z_1) &= \int_{Z_1 Z_2} f'(Z) dZ \quad (\text{コノデ } Z \text{ カラ } t = \text{変換スレバ}) \\ &= \int_0^1 f'(Z_1 + (Z_2 - Z_1)t) (Z_2 - Z_1) dt \\ &= (Z_2 - Z_1) \int_0^1 f'(Z_1 + (Z_2 - Z_1)t) dt \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta_1(Z_2, Z_1) = \int_0^1 f'(Z_1 + (Z_2 - Z_1)t) dt$$

所かコノ結果ハ $Z_1 = Z_2$ ノトキモ成立スレコトハ明ラカ
デアルカラ定理ハ $\rho = 1$ ノトキ成立ツ。

$$\Delta_1(Z_3, Z_1) - \Delta_1(Z_2, Z_1) = \int_0^1 [f'(Z_1 + (Z_3 - Z_1)t) - f'(Z_1 + (Z_2 - Z_1)t)] dt$$

$$\begin{aligned} \text{然ルニ} \quad & f'(Z_1 + (Z_3 - Z_1)t) - f'(Z_1 + (Z_2 - Z_1)t) \\ &= \int_{Z_1 + (Z_3 - Z_1)t, Z_1 + (Z_2 - Z_1)t} f''(Z) dZ \end{aligned}$$

($\because Z_1, Z_2, Z_3$ が $D =$ ザクセ $0 \leq t \leq 1$ ナル故 $Z_1 + (Z_3 - Z_1)t,$
 $Z_1 + (Z_2 - Z_1)t$ が $D =$ ザクス、故ニ線分 $Z_1 + (Z_3 - Z_1)t,$
 $Z_1 + (Z_2 - Z_1)t$ 即ち $Z = Z_1 + (Z_2 - Z_1)t + (Z_3 - Z_2)t t_1,$
 $0 \leq t, t_1 \leq 1$ が $D =$ ザクス) 上ノ積分変数 Z ヲ $(Z_3 - Z_2)t t_1 \neq 0$
トシテ $t_1 =$ 変換スレバ

$$\begin{aligned} & f'(Z_1 + (Z_3 - Z_1)t) - f'(Z_1 + (Z_2 - Z_1)t) = \\ & (Z_3 - Z_2) \int_0^1 f''(Z_1 + (Z_2 - Z_1)t + (Z_3 - Z_2)t t_1) t dt_1 \end{aligned}$$

コノ式ヨリ

$$\begin{aligned} & \frac{f'(Z_1 + (Z_3 - Z_1)t) - f'(Z_1 + (Z_2 - Z_1)t)}{Z_3 - Z_2} \\ &= \int_0^1 f''(Z_1 + (Z_2 - Z_1)t + (Z_3 - Z_2)t t_1) t dt_1 \end{aligned}$$

トナリ、コレハ $(Z_3 - Z_2)t = 0$ デモ成立スルカラコレヨリ

$$\Delta_2(Z_3, Z_2, Z_1) = \int_0^1 \int_0^1 f''(Z_1 + (Z_2 - Z_1)t + (Z_3 - Z_2)tt_1) t dt_1 dt$$

Δ_1 カラ Δ_2 ヲ積分デ表ハシタ式ヲ出シタヤウニ Δ_n ノトキ

定理が成立スルトキ Δ_{n+1} ニツイテモ成立スルコトが証明サ

レルが上ト同様デアルカラコレニハ略ス、依テ數學的帰納法

ニヨリ定理ノ真ナルコトガワカル。

定理1ノ証明

$\alpha = 0$ トシテモ一般性ヲ失ハナイカラ、今

D デ $R(f^{(p)}(z)) > 0$ ナリトスル、補助定理ニヨツテ

$(\Delta_p(Z_{p+1}, Z_p, \dots, Z_1))$ ハ補助定理ト同ジ意味トスル、

以下同様)

$$\Delta_p(Z_{p+1}, Z_p, \dots, Z_1) = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f^{(p)}(Z_1 + (Z_2 - Z_1)t + \dots + (Z_{p+1} - Z_p)tt_1 \dots t_{p-1}) t^{p-1} t_1^{p-2} \dots t_{p-2} dt dt_1 \dots dt_{p-1}$$

$$\therefore R \Delta_p(Z_{p+1}, Z_p, \dots, Z_1) = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 R f^{(p)}(Z_1 + (Z_2 - Z_1)t + \dots + (Z_{p+1} - Z_p)tt_1 \dots t_{p-1}) t^{p-1} t_1^{p-2} \dots t_{p-2} dt dt_1 \dots dt_{p-1}$$

コレニ “ $U(t, t_1, \dots, t_{p-1})$ が $0 \leq t \leq 1, 0 \leq t_1 \leq 1, \dots$

$\dots, 0 \leq t_{p-1} \leq 1$ ニテ連続デ且ツ負ナラザル実函数デ且

ツ上ノ區間ニバクスル一系点 $(t', t'_1, \dots, t'_{p-1})$ デ正ナラ

ズ $\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 U(t, t_1, \dots, t_{p-1}) dt dt_1 \dots dt_{p-1} > 0$ デアル”

ト云フ定理ヲ用テレバ $R \Delta_p(Z_{p+1}, Z_p, \dots, Z_1) > 0$ ト

ナリ從ツテ $\Delta_p(Z_{p+1}, Z_p, \dots, Z_1) \neq 0$, 故ニ $f(z)$ ハ D

ニ於テ高々 p 葉デアル。

系1. $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ ナ $|z| < r$ デ正則、且ツコレデ

$$\left| \frac{f^{(p)}(z)}{p!} - a_p \right| < |a_p| \quad \text{ナラバ } |z| < r \text{ デ高々 } p \text{ 葉デア}$$

ル。

コレハ能代氏が本誌 18 号 デ豫想 A トシテ述ベラレタモノデア。

証明. $a_p = |a_p| e^{i\alpha}$ (α ハ 實常數) トオケバ $\Re\left(\frac{f^{(p)}(z)}{p!} \cdot e^{-i\alpha}\right) > 0$

ガ假設ヨリ得ラレルカラ、結局定理 1 ヲ用ヒテ系 1 ガ正シイコトガワカル。

系 2. 特ニ $p=1$ トスレバ單葉函數ニ関スル能代氏ノ定理 A トナル。

次ニ $f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p + \dots$ ガ $0 < |z| < r$

デ正則デ且ツ $\left| \frac{z^{p+1} f^{(p)}(z)}{(-1)^p p!} - 1 \right| < 1$ ナルヤウナ函數 $f(z)$

ヲ考ヘヤウ。

$f(z) - \frac{1}{z} = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p + \dots = g(z)$ トオケバ

$g(z)$ ハ $|z| < r$ デ正則デア。 $z_{p+1}, z_p, \dots, z_1$ ヲ $0 < |z| < r$ 内ノ点トスル、

又 $\Delta_0(z_1) = f(z_1), \Delta_1(z_2, z_1) = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}, \dots$

$\dots, \Delta_k(z_{k+1}, z_k, \dots, z_1) = \frac{\Delta_{k-1}(z_{k+1}, z_{k-1}, \dots, z_1) - \Delta_{k-1}(z_k, z_{k-1}, \dots, z_1)}{z_{k+1} - z_k},$
($k=1, 2, \dots, p$)

トスレバ上記補助定理ヲ用フレバ

$$\Delta_p(z_{p+1}, z_p, \dots, z_1) = \frac{(-1)^p}{z_1 z_2 \dots z_{p+1}} + \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 g^{(p)}(z_1 + (z_2 - z_1)t + \dots$$

$$\cdots + (z_{p+1} - z_p) t_1 \cdots t_{p-1} \Big) t^{p-1} \cdots t_{p-1} dt \cdots dt_{p-1}$$

又 $0 < |z| < r = \tau$ ハ $f^{(p)}(z) - \frac{(-1)^p p!}{z^{p+1}} = g^{(p)}(z)$ ナル故上

ノ假説ヨリ $\left| \frac{z^{p+1} g^{(p)}(z)}{p!} \right| < 1$ 即チ $|g^{(p)}(z)| \leq \frac{p!}{r^{p+1}}$

(上ノ條件ヨリ $\max_{|z| \leq r < \tau} \left| \frac{z^{p+1} g^{(p)}(z)}{p!} \right| < 1$ デ $\max$ ハ境界ヲ

トルカラ $|g^{(p)}(z)| < \frac{p!}{r^{p+1}}$ ヨリ上式が出ル)

$$\therefore \left| \Delta_p(z_{p+1}, z_p, \cdots, z_1) \right| \geq \frac{1}{|z_1 z_2 \cdots z_{p+1}|} - \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{p!}{r^{p+1}} t_1^{p-1} t_2^{p-2} \cdots t_{p-1} dt_1 \cdots dt_{p-1}$$

$$> \frac{1}{r^{p+1}} - \frac{p!}{r^{p+1}} \cdot (p!)^{-1} = 0$$

依ツテ次ノ定理ヲ得。

定理2. $f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots + a_p z^p + \cdots$ ガ $0 < |z| < r$ デ正則デ、且ツコノデ $\left| \frac{z^{p+1} f^{(p)}(z)}{(-1)^p p!} - 1 \right| < 1$ ナラバ $f(z)$ ハ $0 < |z| < r$ デ高々 p 葉デアル。

系. 特ニ $p=1$ トスレバ能代氏が本誌18号デ述べラレタ單葉函數ニ關スル定理B'トナル。

次ノ定理ハ、ゴクツマラヌモノデアルガ序デミアルカラ述べテオク。

定理. $f(z) = \frac{1}{z} + g(z)$ デ $g(z)$ ガ凸狀領域 D ($z=0$ ヲ含ム) デ正則デ、且ツ D_0^* ヲ D カラ $z=0$ ヲ除イタ領域トスルトキ D_0^* デ $|g'(z)| \leq M$ 即チ $\left| \frac{f'(z) \cdot z^2 + 1}{z^2} \right| \leq M$ トスレバ $f(z)$ ハ $0 < |z| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ ト D_0^* ノ共通部分デ單葉

デアル。

コノ $\frac{1}{\sqrt{M}}$ がコレヨリ 大キク 出来ヌコトハ $f_0(z) = \frac{1}{z} + a_0 + Mz$,

即チ $g_0(z) = a_0 + Mz$ ノトキ

$$f'_0\left(\pm \frac{1}{\sqrt{M}}\right) = \frac{-1 + M\left(\pm \frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2}{\left(\pm \frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2} = 0$$

ヨリヲカル。コレハ定理2ノ系ヲ幾分カ擴張シタモノデ

アル。

証明ハ定理2ト同様ノ方針デ出来ル、コノハ省略スル、又

定理2モ上ノヤウニ幾分カハ拡張出来ルが、コノハ省略ス

ル。終リニ援助ヲタマハッタ森本先生並ニ平野氏ニ敬意ヲ表

シマス。(昭和10年1月29日)