91. Selberg ノ論文中ノ二ツノ Lemma ニ就テ

高橋 進一（阪大）

H. Selberg, Algebroide Funktionen und Umkehr-funktionen Abelscher Integrale (Skrift. utgitt av det Norske Videnskaps Oslo, 1934) p. 34—36 ニアル二ツノ Lemma ニ就テ若干ノ remark ヲシタイト思ヒマス。

第一ノ lemma ハ

$$\varphi(x) = 1 + \gamma_1 x + \cdots\cdots$$

ガ $|x| < R$ デ regular 且ツ 0 ナラズトセバ

$$(1) \quad [M(r)]^{\frac{\vartheta}{8}} \leqq M(\vartheta r)$$

此處ニ $M(r)$ ハ $|\varphi(x)|$ ノ $|x| = r$ ニ於ケル maximum, 又 $0 \leqq r \leqq \vartheta r < R$ トスル

此ノ lemma ハ任意ノ $r(>0)$ ニ對シテ常ニ $M(r) \geqq 1$ デアルカラ $\vartheta \geqq 8$ デナイト trivial ナ不等式トナル。(1) ノ代リニ私ハ

$$(2) \quad [M(r)]^{\frac{\vartheta-1}{2}} \leqq M(\vartheta r)$$

ヲ得タ。(2) ダト兎ニ角 $\vartheta \geqq 3$ ナル價値ノアル不等式トナル。又 $\vartheta \geqq \frac{4}{3}$ ナラ $\frac{\vartheta-1}{2} \geqq \frac{\vartheta}{8}$ ダカラ (2) ハ (1) ヨリハマシデアル。

(2) ノ証明ニハ Carathéodory ノ不等式

$$m(r_1) \leqq \frac{2r_1}{r-r_1} \log M(r), \quad R > r > r_1 > 0$$

ヲ用フ。但シ $m(r_1)$ ハ $\psi(x) = \log \varphi(x)$ ナル函数ノ $|x| = r_1$ ニ於ケル絶對値ノ maximum デアル。故ニ

$$m(r) \leqq \frac{2}{\vartheta - 1} \log M(\vartheta r), \quad \vartheta \geqq 1$$

又 $\log M(r) \leqq m(r)$ ダカラ

$$\frac{\log M(\vartheta r)}{\log M(r)} \geqq \frac{\frac{\vartheta-1}{2} m(r)}{m(r)} = \frac{\vartheta - 1}{2}$$

依ッテ

$$\left[M(r)\right]^{\frac{\vartheta-1}{2}} \leqq M(\vartheta r), \quad q.e.d.$$

然シ實際ハ

$$\left[M(r)\right]^{\vartheta} \leqq M(\vartheta r), \quad \vartheta \geqq 1$$

ナル不等式ガ成立シサウニ思ハレル。

次ニ lemma 2 ハ

$$\varphi(x) = 1 + r_1 x + \cdots\cdots \text{ ヲ } |x| \leqq R \text{ デ regular}$$

且ツ 0 ナラズトスル。$|\varphi(x)|$ ノ $|x| = r$ ($r \leqq R$) ニ於ケル maximum ヲ $M(r)$ トスルトキ

$$u(x) = \int_0^x \varphi(x)\, dx$$

ハ $|x| < \rho$ ヲ $|u| < \frac{\rho}{2}$ ナル円ヲ含ム様ナ領域ニ單葉ニ寫像スル。但シ

$$\rho = \mathrm{Min}\left(\frac{R}{8(e+1)\log M(R)}, \frac{R}{2(e+1)}\right)$$

此ハ次ノ樣ナ問題ト同ジデアル。

$\psi(x)=x+\gamma_2x^2+\cdots\cdots$ ヲ $|x|\leqq R$ デ *regular* トシ且ツ

$$|\psi'(x)|\leqq\frac{M(R)}{R},\qquad |x|\leqq R$$

ナルトキ $|x|<\rho$ デ $\psi(x)$ ガ單葉ナルベキ ρ ノ上限 ρ_M 及ビ ψ 平面上デ $|x|\leqq R$ ノ $\psi(x)$ ニ依ル寫像領域內ニ含マレル單葉円ノ半径ノ上限、即チ *Block* ノ常数 B_M ヲ見出スコト。

此ノ問題ハ既ニ *Landau* ガ *Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante (Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 1926) p.471–474* デ完全ニ解決シタノデアッテ其ニ依レバ

$$\rho_M=\frac{R}{M(R)},\quad B_M=M(R)\left\{1+\left(\frac{M^2(R)}{R^2}-1\right)\log\left(1-\frac{R^2}{M^2(R)}\right)\right\}$$

デアル。

然モ之等ノ數値ハ何レモ *best* ナ結果デ之以上大キクスルコトハ出來ヌ。ダカラ *lemma* 2ハ全ク無意味ナモノトナル。尚

$$|\psi'(x)|\leqq\frac{M(R)}{R}$$

ノ代リニ

$$|\psi(x)|\leqq M(R)\qquad |x|\leqq R$$

ナル條件ニ置換ヘタトキ

$$\rho_M=M(R)-\sqrt{M^2(R)-1},\quad B_M=M(R)\left(M(R)-\sqrt{M^2(R)-1}\right)^2$$

ナルコトモ *Landau* ニ依ッテ知ラレテ居ル