



Title	冪級數ノ切断多項式ニ就テ
Author(s)	鍋谷, 堅次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 31, p. 1-6
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74016
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

94. 冪級数ノ切断多項式ニ就テ

鍋谷 堅次郎 (東北大)

前 = 「調和函数ニ関スル二三ノ定理」ト題シテ述べマシタノハ “Remarks on some theorems concerning sections of a power series I and II”ノ補遺ノ積リデアッタノデスガ、冪級数ノ場合ハ調和函数ノ場合ト少シ様子が違ヒマスノデ、ソレヲ明ニスルタメ、古イ原稿ノ一部ヲ次ニ述べマセウ。誤リガアリマシタラ御示教ヲ御願ヒ致シマス。

1. E. Landauノ著書 *Ergebnisse der Funktionentheorie*ノ第1章第1節定理1ノ要点ハ次ノ如ク述べルコトが出来マス。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ヲ $|x| < 1$ デ正則トシ、 $n \geq 0$ ニ對シテ

$$S_n(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{\nu}$$

$$t_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_n(x)}{n+1}$$

トオケバ

$$|t_n(x)| \leq M(r)$$

$M(r)$ ハ $f(x)$ ノ円 $|x|=r$ ($0 \leq r < 1$) 上ニ於ケル

Maximum modulusヲ表ハスモノトシマス。上ノ様ニ述べ変ヘルト調和函数ノ場合ト同様、次ノヤウニ擴張

サレルコトが分ります。

即ち

$f(x)$, $S_n(x)$, $t_n(x)$ ヲ前ト同様トシテ

$f(x)$, $S_n(x)$, $t_n(x)$ ヲ前ト同様トシテ

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |t_n(x)|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad x = re^{i\theta}, \quad p \geq 1$$

ユノ不等式ニ於テ $0 < r < 1$ ニ對シテ等号が成立スルハ
 $f(x)$ が常数ノトキニ限リマス。 $p \rightarrow \infty$ トレタ場合が最
 初ニ述べタ定理デス。

簡單ノタメ先ヅ $p=1$ ノ場合ヲ証明シマス。 $x' = e^{i\varphi}$

トスルト

$$f(xx') (1+x'+\dots+x'^n)^2 = S_0(x) + \sum_{\nu=0}^1 S_\nu(x) x' + \dots \\
\dots + \sum_{\nu=0}^n S_\nu(x) x'^\nu + C_{n+1}^{(n)}(x) x'^{n+1} + C_{n+2}^{(n)}(x) x'^{n+2} + \dots$$

ナル關係が成立シマスカラ

$$\sum_{\nu=0}^n S_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x'|=1} \frac{f(xx')}{x'^{n+1}} (1+x'+\dots+x'^n)^2 dx'$$

が得ラレマス。從ツテ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=0}^n S_\nu(x) \right| d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|x'|=1} \frac{f(xx')}{x'^{n+1}} (1+x'+\dots+x'^n)^2 dx' \right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{|x'|=1} \left| \frac{f(xx')}{x'^{n+1}} (1+x'+\dots+x'^n)^2 dx' \right| \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(xx') (1+x'+\dots+x'^n)^2 \right| d\varphi d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 + e^{i\varphi} + \dots + e^{i\pi\varphi} \right|^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(xe^{i\varphi})| d\theta d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 + e^{i\varphi} + \dots + e^{i\pi\varphi} \right|^2 d\varphi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| d\theta \\
&= \frac{\pi+1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| d\theta
\end{aligned}$$

故 =

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |t_n(x)| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(x)| d\theta$$

コノ不等式 = 於テ n ノ一ツノ値ト r , $0 < r < 1$ ナル一ツノ値 = 對シテ等号が成立スルナラバ $f(x)$ が常數デナケレバナラスコトハ次ノ様ニシテホリマス。ソレニハ上ノ証明ヲ見ルトホル様ニ因 $|x| = r$ 上ニ於テ

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|x'|=1} \frac{f(xx')}{x'^{n+1}} (1+x'+\dots+x'^n) dx' \right| d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{|x'|=1} \left| \frac{f(xx')}{x'^{n+1}} (1+x'+\dots+x'^n) dx' \right| d\theta
\end{aligned}$$

が成立シナケレバナリマセン、故ニ $|x| = r$ 上ニ

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|x'|=1} \frac{f(xx')}{x'^{n+1}} (1+x'+\dots+x'^n) dx' \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{|x'|=1} \left| \frac{f(xx')}{x'^{n+1}} (1+x'+\dots+x'^n) dx' \right|
\end{aligned}$$

が成立シナケレバナリマセン。コレが成立スルタメニ必要

$=$ シテ 十餘ノ條件ハ $\frac{f(x x')}{x'^{n+1}} (1+x'+\dots+x'^n)^2 dx'$ ガ円
 $|x'|=1$ 上デ一定ノ *amplitude* ヲモツコトヲアリマ
 ス。然レ $\frac{1}{x'^{n+1}} (1+x'+\dots+x'^n)^2 dx'$ ハ $|x'|=1$ 上
 デ一定ノ *amplitude* ヲ有シマス。コレハ次ノ様式ニ
 ヨリ余リマス。

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{x'^{n+1}} (1+x'+\dots+x'^n)^2 dx' \\
 &= \left(\frac{1}{x'^n} + \frac{1}{x'^{n-1}} + \dots + 1 \right) (1+x'+\dots+x'^n) \frac{dx'}{x'} \\
 &= (e^{-in\varphi} + e^{-i(n-1)\varphi} + \dots + 1) (1+e^{i\varphi} + \dots + e^{in\varphi}) d\varphi \\
 &= |1+e^{i\varphi} + \dots + e^{in\varphi}|^2 d\varphi
 \end{aligned}$$

上ノ結果 $f(x x')$ ガ $|x'|=1$ 上、即チ $f(x)$ ガ
 $|x|=\gamma$ 上デ一定ノ *amplitude* ヲ持ツコトニナリマス。
 $f(x)$ ハ $|x|=\gamma$ 上及ビソノ内部デ正則デスカラ鏡像ノ原
 理ニヨリ $f(x)$ ハ全平面デ正則トナリ、一ツノ常数デナケレ
 バナリマセン。 $f(x)$ ガ常数ナルトキハ上述ノ不等式ハ
 $n-1-\gamma$ ノ如何ニ拘ラズ成立スルコトハ明カデス。

2. $p > 1$ ノ場合ヲ証明、ルニハ上ノ証明ノ中途デ得ラレタ
 式

$$\sum_{\nu=0}^n S_{\nu}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x'|=1} \frac{f(x x')}{x'^{n+1}} (1+x'+\dots+x'^n)^2 dx'$$

1 左右両辺ニ $\left(\sum_{\nu=0}^n S_{\nu}(x) \right)^{p-1}$ ヲ掛ケ

$$\left(\sum_{\nu=0}^n S_{\nu}(x) \right)^p = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x'|=1} \left(\sum_{\nu=0}^n S_{\nu}(x) \right)^{p-1} \frac{f(x x')}{x'^{n+1}} (1+x'+\dots+x'^n)^2 dx'$$

トシテ進メバヨイノデス。

以下調和函数ノ場合ト大体同様デス。等号が成立スル場合ノ吟味モ上ノ $p=1$ ノ場合ト並行シテ同様ノ結果ニナルコトが分リマス。

次ノ *Landau* ノ本ノ定理 2 モ同様ノ方法ニヨリ擴張サレ次ノヤウナ不等式が得ラレマス。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|S_0(x)|^2 + |S_1(x)|^2 + \dots + |S_n(x)|^2}{n+1} \right]^p d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^{2p} d\theta, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|S_0(x)| + |S_1(x)| + \dots + |S_n(x)|}{n+1} \right]^{2p} d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^{2p} d\theta. \end{aligned}$$

但シ後者ハ前者ノ直接ノ結果デアルコトハ各々ノ左辺ノ積余ノ *Integrand* ラ比較スレバ明ラカデス、之等ノ不等式ニ於テモ $0 < r < 1$ ノ一ツノ r ト n ノ一ツノ値ニ對シテ等号が成立スルトキハ $f(x)$ が常数デナケレバナラヌコトが証明サレマス。ソノ証明法ハ *Math. Zeitschrift*, 1 = 於ケル *O. Szász* ノ論文 (177 page 及ビ 164 page) = アル *I. Schur* ノ方法ト同様デス。

Landau ノ本ノ定理 3 及ビ第二節ノ *Landau* ノ定理モ同様ノ方針ヲ拡張サレマスが此処ニハ略スルコトニシマス。以上述べタ結果ハ何レモ多変数ノ函数ノ場合ニ擴張スルコトが出来マス。例ヘバ

$$f(x, y) \text{ 7 } |x| < R_1, |y| < R_2 \text{ 7" } x = r_1 e^{i\theta}, y = r_2 e^{i\varphi}$$

1) 正則函数トスノバ

$$\left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{(M+1)(N+1)} \left| \sum_{m,n=0}^{M,N} \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} a_{\mu,\nu} x^\mu y^\nu \right| \right)^p d\theta d\varphi \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^p d\theta d\varphi \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$