OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	二三ノ Matrixfunktionen ニツイテ
Author(s)	北川, 敏男; 浅野, 啓三
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 31, p. 6-11
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74017
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

95. 二三ノ Matrixfunktionen ニツイテ

北川敏男，浅野啓三（阪大）

$A=(a_{ik})(i,k=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲ n 次ノ Matrix，a_{ik} ハ real ヌハ komplex variable トシ $f(A)$ ヲ A ノ stetige Matrixfunktion トスル。[1] 以下 A ノ characteristic equation ヲ

$$\varphi(x)=|xE-A|=x^n+c_1x^{n-1}+\cdots\cdots+c_n=0$$

$$c_\nu=(-1)^\nu\sum_{\{i_1,\cdots,i_\nu\}}a_{\{i_1,\cdots,i_\nu\},\{i_1,\cdots,i_\nu\}}\quad(\nu=1,2,\cdots,n)$$ [2]

ソノ根，即チ Eigenwert ヲ $\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n$ トスル。

定理 I) real ヌハ komplex variable，連続ナル Matrixfunktion $f(A)$ デ

---

(1) $f(A)$ ＝関シテハ A ノ $(n-1)$ 個ノ列（又ハ行）ヲ任意ニ fix シタ場合、残リノ列ノ Variable ＝関シテ連続ニナルコトヲ仮定スレバ以下ノ証明ニハ充分デアル。

(2) $a_{\{i_1,\cdots,i_\nu\},\{k_1,\cdots,k_\nu\}}$ ハ A ノ $i_1,\cdots\cdots,i_\nu$ 行及ビ $k_1,\cdots\cdots,k_\nu$ 列ヲトツテ作ッタレ次ノ行列式

(1) $f(AB)=f(BA)$，$A=(a_{ik})$，$B=(b_{ik})$

ヲ満足スルモノハ $c_1,\cdots\cdots,c_n$ ノ函数デアル。

（証明） 連続性ニヨツテ (1) ハ

(2) $f(P^{-1}AP)=f(A)$

ト equiralent デアル。Matrix A ハ

(2) $f(P^{-1}AP) = f(A)$

ト equivalent デアル. Matrix A ハ

$$A_1 = \begin{pmatrix} C_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ C_2 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ C_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ト同ジ characteristic equation ヲ有スル. 従ッテ A ノ Eigenwert ガ全部相異ルナラバ、A トA,トハ Elementarteiler ガ一致スルカラ Matrix $P(|P| \neq 0)$ ヲ適當ニトッテ

$$P^{-1}AP = A_1$$

トスルコトガ出來ル、故ニ

(3) $f(A) = f(A_1)$

Eigenwert ノ中デ等シイモノガアル場合デモ連続性ニヨッテ (3) ハヤハリ成立スル、逆ニ $C_1, \cdots\cdots, C_n$ ハ(1)ヲ満足スルカラ, $C_1, \cdots\cdots, C_n$ ノ函数ハ (1) ヲ満足スル。(証明終リ)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ 0 & & & 0 \\ C_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ C_1 & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ C_{n-1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = A_0 B$$

今　$E_1(t)=\begin{pmatrix} t & & 0 \\ & 1 & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$　トシ

(4)　$f(ABE_1(t))=f(BAE_1(t))$　(從ッテ$=f(AE_1(t)B)$)

ヲ假定スレバ

$$B_1=E_1(t)^{-1}BE_1(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1t & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \\ c_nt & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$　トシテ

$$f(A_0B_1)=f(A_0E_1(t)^{-1}BE_1(t))=f(A_0E_1(t)^{-1}E_1(t)B)=f(A_0B)=f(A_1)$$

$$\therefore\quad f(A)=f(A_1)=f\begin{pmatrix} c_1t & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{n-1}t & & & 1 \\ c_n & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$t\to 0$　トスルト　$f(A)=f\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ c_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

從ッテ　$f(A)$　ハ　c_n，即チ行列式　$|A|$　ノミノ函數＝ナル、ヨッテ中野氏ノ証明サレタ定理ヲ得ル。(1)

定理 2)　連続ナル *Imatrixfunktion*　$f(A)$　ガ

$$f(ABC)=f(BAC)$$

ヲ満足スルナラバ、$f(A)$　ハ行列式　$|A|$　ノミノ函數デアル。

特別ノ函數トシテ

$$S(AB)=S(BA),\quad S(A+B)=S(A)+S(B)$$

トナルモノヲ考ヘルト、ソレハ linear デアルカラ明カニ

$$S(A)=ac,\quad (a\text{ハ常数})$$

トナルコトガ分ル。又

$$n(AB)=n(A)n(B)$$

トナルモノハ $n(A)=\varepsilon|c_n|^{\rho}$ $(\varepsilon=e^{im\theta},\ |A|=|c_n|e^{i\theta},\ m\ integer)$ トナル。(1)

輯報, Vol. XI. NO. 1 ニ於テ中野氏ハ南雲氏ノ証明サレタ stetige Vektorfunktion ニ関スル定理(2)ノ別証ヲ考ヘラレタ。(3) 南雲氏ハ連続性ヲ假定サレタガ、ソレハ必要デハナイ、ソノコトハ中野氏ノ証明カラモ分ル、尚定理ハ任意ノ Körper ニ於テ成立スル. Körper デナクテモ單位元ヲ有スル Ring デアレバヨイ。更ニソレラノ Korper 或ハ Ring ハ kommutativ デアルコトヲ要シナイ、此処デソノ定理ノ別証ヲ考ヘテミル。定理ハ次ノ様ニ述ベルコトガ出來ル。

定理: Kヲ單位元ヲ有スル Ring トシ、Kノ任意ノ (n,m)-Matrix X ニ一意的ニ Kノ (n,l)-Matrix Y ガ對應シ、此ノ對應ニ於テ PX ニハ PY ガ對應スルモノトスル。

---

(1) H. Nakano: Über eine stetige Matrixfunktion. (學士院記事 VIII. NO. 6)

(2) M. Nagumo: Über eine kennzeichnende Eigenschaft der Linear-kombination von Vektoren und ihre Anwendung. (Göttinger Nachrichten 1933)

(3) H. Nakano: Über die Matrixfunktion. (輯報 Vol. XI. NO. 1)

但シPハKノ任意ノ (n,n)-Matrix デ $n \geqq 2$. 然ルトキハ (m,l)-Matrix A ガ存在シ $Y=XA$.

lemma: Kノ任意ノVektor $\mathfrak{x}=(x_1,\cdots\cdots x_m)$ニ, Kノ Vektor $\mathfrak{y}=(y_1,\cdots\cdots,y_l)$ ガ一意的ニ對應シ、$\mathfrak{x}$ノ linear Kombination $\sum_i \alpha_i \mathfrak{x}_i$ ハ對應スル $\mathfrak{y}$ノ linear Kombination $\sum_i \alpha_i \mathfrak{y}_i$ ガ對應スルナラバ, (m,l)-Matrix A ガ存在シ $\mathfrak{y}=\mathfrak{x}A$.

(証明) $\varepsilon_i=(\overbrace{0,\cdots 0}^{i},1,0\cdots 0)\to \mathfrak{a}_i=(a_{i1},\cdots\cdots,a_{il})\ (i=1,2,\cdots\cdots,m)$ トシ $A=(a_{ik})$ トスレバ $\mathfrak{a}_i \longrightarrow \varepsilon_i A$.

$$\therefore\quad \mathfrak{x}=\sum_{i=1}^{m} x_i \varepsilon_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{m} x_i \varepsilon_i A = \mathfrak{x}A.$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1,\cdots\cdots x_{1m} \\ \cdots\cdots \\ x_{n1},\cdots x_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_n \end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix} y_1,\cdots\cdots y_{1l} \\ \cdots\cdots \\ y_{n1}\cdots\cdots y_{nl} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathfrak{y}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{y}_n \end{pmatrix}$$

トシ、X ヲ現ハセル i 行目ノ Zeilenvektor $\mathfrak{x}_i$ ヲ, 對應スル Matrix Y ノ i 行目ノ Zeilenvektor $\mathfrak{y}_i$ ヲ對應サセル. $\mathfrak{x}_i \longrightarrow \mathfrak{y}_i$

$$X\to Y,\quad E_{1i}X=\begin{pmatrix} \mathfrak{x}_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\longrightarrow E_{1i}Y=\begin{pmatrix} \mathfrak{y}_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(E_{ij} ハ Matrizeneinheiten)

トナルカラ、Zeilenvektor $\mathfrak{x}$ ノ Menge ヲ考ヘルト、ソノ各々ニ Vektor $\mathfrak{y}$ ガ一意的ニ對應スルコトガ分ル。逆ニ $\mathfrak{x}_i \longrightarrow \mathfrak{y}_i$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲ任意ノ n 個ノ對應スル Vektor トスレバ

$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\longrightarrow Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ ハ上ノ定理ヲ於ケル Matrix

ノ對應ニ十ル、又

$$P=\begin{pmatrix}\alpha_1,\alpha_2,0\cdots\cdots 0\\ 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0\\ \vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\ 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0\end{pmatrix},\qquad PX=\begin{pmatrix}\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\longrightarrow PY=\begin{pmatrix}\alpha_1y_1+\alpha_2y_2\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$(n\geqq 2!)$

デアルカラ　$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\longrightarrow\alpha_1y_1+\alpha_2y_2$

從ッテ Vektor x ノ lineare Kombination ニハ、對應スル Vektor y ノ lineare Kombination ガ對應スル．ヨッテ lemma ニヨリ $y=xA$.

$$\therefore\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1A\\ \vdots\\ x_nA\end{pmatrix}=XA$$