OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | 定規ト「開キノ定ツタコンパス」（Eichmass）ニ依ル作圖ニ就テ |
| Author(s) | 彌永, 昌吉 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 1935, 33, p. 1-5 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/74023 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# 101. 定規ト「開キノ定ツタコンパス」(Eichmass) ニ依ル作圖ニ就テ

彌永昌吉

Hilbert: Grundlagen der Geometrie ノ最後ノ章（第七章）ニ就テ起ツタ疑問ヲ讀者ニ質シ度イ。

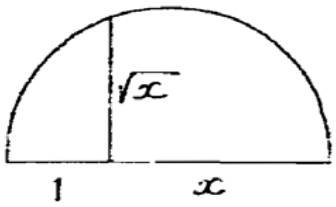
コノ章デハ要スルニ、定規デ出來ル作圖ノ外，(A) 線分ノ移動： 即チ、與ヘラレタ線分 $a$; 及ビ與ヘラレタ直線 $l$, ソノ上ノ定点 A，$l$ 上ニ A ニ關シテ定メラレタ側 —— ガアルトキ、コノ側ニ点 B ヲトツテ $AB=a$ ナラシメルコト、同様ノ意味デ

(B) 角ノ移動

ガ可能トスルトキ、如何ナル作圖題ガ可能トナルカ？ ト云フ問題ガ論ゼラレテアル。（「作図題」トカ、ソレガ「可能」トカイフ意味ヲ公理的立場カラ嚴密ニ述ベルノハ可成リ面倒ナノデ、コヽデハ差控ヘル）但シ、「定規デ出來ル作図」トハイフマデモナク「二点ヲ結ブ直線ヲ引ク」トカ、「二直線ガ交ルトキ、ソノ交点ヲ求メル」トカイフ作圖；以下略シテ(L)ト書ク。

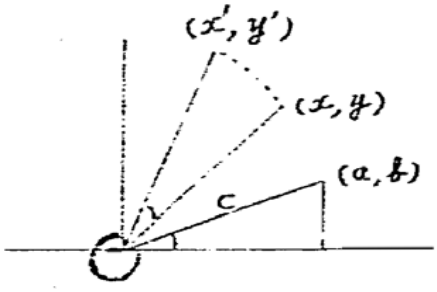
Hilbert ハコノ問題ヲ興味アル代數學ノ向題ニ移シテ居ルノデ、ソコニコノ章ノ主流ガアル．ソノ一寸思ヒガケナイ結果ハ（L1), (A), (B) デ出來ル作図題ノ範圍ハ、定規トコンパスデ出來ルソレヨリモ本質的ニ小サイコトデアル。即チ

解析幾何學的ニ考ヘレバ、定規ダケデ出來ル作図ハ一次方程式ヲ何度カ解クコトニナルノデ、ツマリ「有理運算」ニ相當スルガ、




コンパスヲ使ヘバ知ラレタ長サノ平方根ノ算出が出來ル。(上図)

然ルニ(L), (A), (B)デハ勝手ナ平方根ヲ出スノハ不可能ナノデアル。如何ニモ、(A), (B)ハ「平行移動」及ビ「廻轉」が出來レバ出來ルコトが容易ニ見エルが、「平行移動」ハ有理運算ノ範圍ヲ出デズ、「廻轉」ノ方程式ハ




$$\begin{cases} x' = \dfrac{a}{c}x + \dfrac{b}{c}y \\ y' = -\dfrac{b}{c}x + \dfrac{a}{c}y \end{cases} \qquad (c^2 = a^2 + b^2)$$

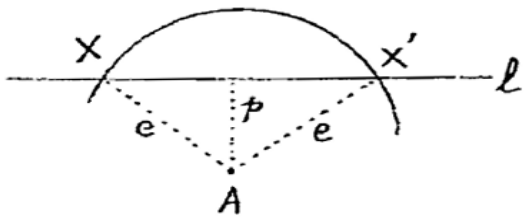
デアルカラ、コヽニ出テ來ル平方根 $c = \sqrt{a^2+b^2}$ デハ根号ノ下ニ必ズ平方ノ和がアル。コレハ任意ノ量デハナイ、例ヘバ1(デ表ハサレル長サ)ノミヲ知ラレタ長サトスルトキ、ソレカラ(L), (A), (B)デ作図サレル(長サヲ表ハス)数ハ何レ代數的ナ実数デアルが、ソノ共軛モ亦凡テ実数トナル。何者、$a, b$ヲ共軛が皆実数デアル様ナ代數的数(始メニ「知ラレタ」1ハ勿論コノヤウナ数)トスレバ $\sqrt{a^2+b^2}$ モ亦マハリ其ノ様ナ数デアルカラ、($\sqrt{a^2+b^2}$ ノ共軛ハ $\pm\sqrt{a'^2+b'^2}$, 但シ$a', b'$ハ$a, b$ノ共軛、$a', b'$ハ假定ニ由ッテ実数デアルカラ、$a'^2+b'^2 \geqq 0$. ソノ平方根ハ虚数ニハナラナイ)依ッテ共軛

が負ニナルヤウナ数——例ヘバ $\sqrt{2}+1$——ノ平方根ノ作図ハ(L),(A),(B)デハ出來ナイ！

問題ハソコデ「有理運算ト算法 $\sqrt{a^2+b^2}$ ノ有限回ノ適用デ出テ來ル量ノ範囲如何？　共軛ガ皆實数ナヤウナ代數的數ハソノ中ニ含マレルカ？」ナドトナツテ純代數的ニ進ム。——筆者ノ疑義ハコノ主流トハ離レテ、Hilbertガ「(L),(A),(B)デ出來ル」トイフ條件ヲ「定規ト開キノ定ツタコンパス(Eichmass)ニ依ル」ト云ヒ替ヘテヰル点ニアル。

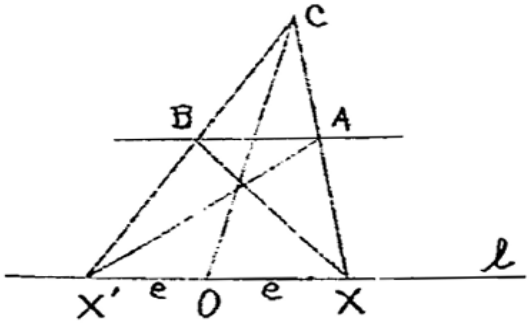
§36.（第七版）デ、定理63トシテHilbertハ(L),(A),(B)デ出來ル作図題ハ定規ト開キノ定ツタコンパスデ出來ルコトヲ証シテヰル。

「定規ト開キノ定ツタコンパスデ」トイフノハ(L)ト次ノ作圖(E)トノ可能ヲ假定スルノ意デアル。




(E)　定ツタ長サeガアルトスル。点Aト直線lトノ距離p(≧0)ガ≦eナルトキ、l上ニ点Xヲ求メテ AX＝e ナラシメルコト。

定理63ノ証明ハ初等幾何學的デ大略次ノ通リ.

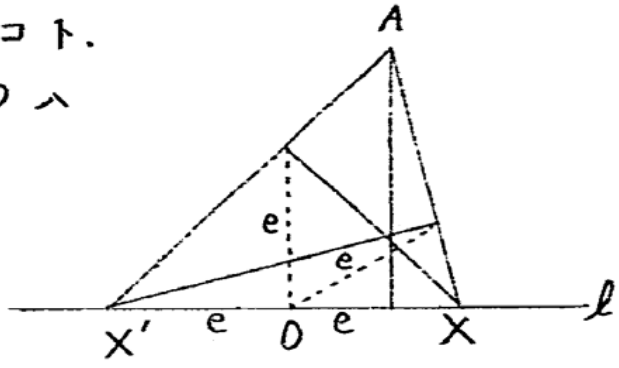



(A),(B)ヲ(L),(E)デ解ケバヨイガ先ヅ補助ノ作図題:

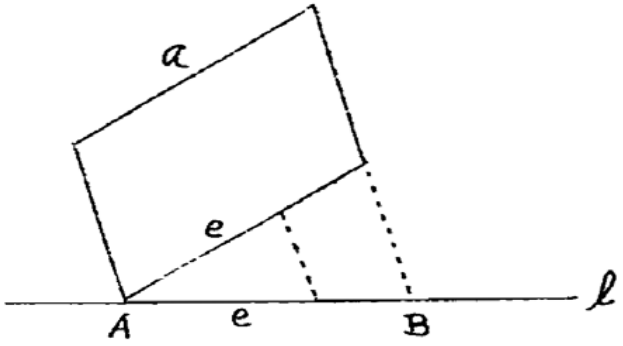
(C)　Aカラl＝平行線ヲ引クコト.

(D)　A カラ $l$ ニ垂線ヲ引クコト.

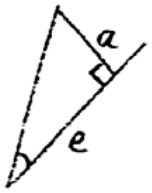
ヲ右図ニ示シタヤウニ解ク.（O ハ $l$ 上ニ任意ニ、止図デハ C ヲ XA 上ニ任意ニトルノデアル）

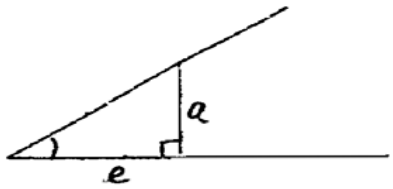



ソレガ出来レバ, (C), (E) ヲ用ヰテ、右ノ如ク (A) ヲ解キ、次ニ (D), (A) ヲ利用シテ (B) ヲ解ケバヨイ。

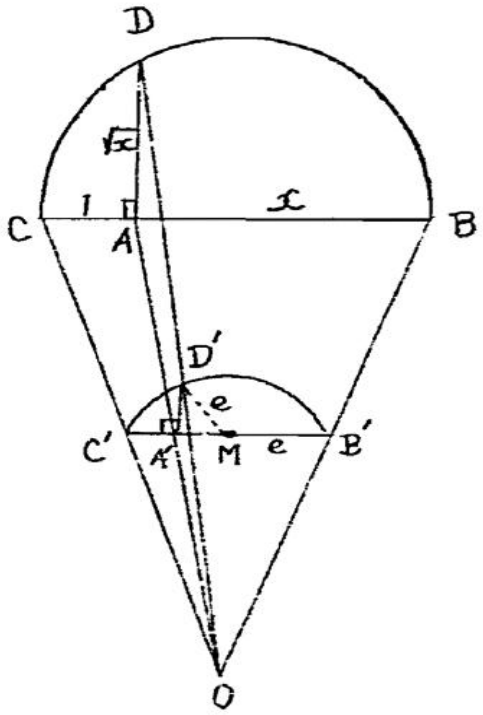



サテコノ逆「(L), (A), (B) デ (E) ガ出来ルカ？」ニ就テハ Hilbert ニハ explicit ニ何モ言ッテナイ。然シ§37デハ Kriterium f. d. Ausführbarkeit geom. Konstr. mittels Lineals und Eichmasses ノ題名下ニ (L), (A), (B) ニ依ル作図ガ論ゼラレ、定規トコンパスデハ出来ルガ、(L), (A), (B) デハ出来ヌ作図ノ例ヲ挙ゲタ後ニハ（P. 120 下ノ方）"（(L), (A), (B) デ出来ナイ,）und kann daher überhaupt nicht mittels Lineals und Eichmasses lösbar sein" ト書イテアル。然ルニ筆者ハ下ノ如ク (L), (E) ニ由ッテ任意ノ知ラレタ長サノ平方根ノ作図ガ出来ル様ニ思フノデアル。




(L), (E) ガ出来ルカラ、(A), (B), (C), (D) ―― 線分, 角




ノ移動；平行線，垂線ノ作図ガ出来ル。

xノ平方根ヲトルノニ、1+x=2eナラバ（開キノ定マラヌ）コンパスデスルト同様ニ出来ル。サモナケレバ、左図ヲ次ノ順序デ作ル。

A, B, Cヲ先ヅ定メル（線分ノ移動）ABニ平行線ヲ引イテ、ソノ上ニ（任意ニ）一点Mヲトル、B′, C′ヲ(E)デ定メ、BB′, CC′ノ交ヘリO，OA, B′C′ノ交リA′ヲ(L)デ定メル、A′カラB′C′ニ、AカラBCニ夫々垂線ヲ立テ、D′ヲ(E)デ定メレバ、DハOD′トAカラBCヘノ垂線トノ交リトシテ出ル。

コレガ正シケレバ、コンパスノ「開キヲ定メル」ノハ無意味デアラウ。

——コレハ小サナ初等幾何學的ノ注意デ、當ッテ砕ケヨウトキマイト、Hilbert第七章ノ興味ニ変化ハナイ。唯々、若シコレガ當ッテ砕ケルトスレバ、三十年來之レニ氣付カレナカッタノハ稍ク不思議ニ感ズル。——トイフノハ或ハ又筆者ガ文献ニ暗イ丈ケデ、風ニ知ラレタコトデモアラウカ。