



Title	定規ト「開キノ定ツタコンパス」 (Eichmass) ニ依ル 作圖ニ就テ
Author(s)	彌永, 昌吉
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 33, p. 1-5
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74023
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

101. 定規ト「開キノ定ツタコンパス」(Eichmass) ニ依ル作圖ニ就テ

彌永昌吉

Hilbert: *Grundlagen der Geometrie* ,
最後ノ章(第七章)ニ就テ起ツタ疑問ヲ讀者ニ質シ度イ。

コノ章デハ要スルニ、定規ヲ出來ル作圖ノ外、(A) 線分
ノ移動: 即チ、與ヘラレタ線分 a ; 及ビ與ヘラレタ直線 l ,
ソノ上ノ定点 A , l 上ニ A ニ關シテ定メラレタ側——ガアル
トキ、コノ側ニ点 B ヲトツテ $AB = a$ ナラシメルコト、同様
ノ意味デ

(B) 角ノ移動

ガ可能トスルトキ、如何ナル作圖題ガ可能トナルカ? ト云
フ問題ガ論ザラレテアル。(「作圖題」トカ、ソレガ「可能」
トカイフ意味ヲ公理的立場カラ嚴密ニ述ベルノハ可成リ面倒
ナノデ、コノデハ差控ヘル) 但シ、「定規ヲ出來ル作圖」トハ
イフマデモナク「二点ヲ結ガ直線ヲ引ク」トカ、「二直線ガ
交ルトキ、ソノ交点ヲ求メル」トカイフ作圖; 以下略シテ(L)
ト書ク。

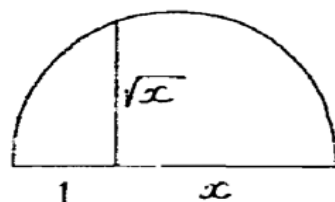
Hilbert ハコノ問題ヲ興味アル代數學ノ向題ニ移シテ
居ルノデ、ソコニコノ章ノ主流ガアル。ソノ一々思ヒガケナ
イ結果ハ (L), (A), (B) ヲ出來ル作圖題ノ範圍ハ、定規トコ
ンパスヲ出來ルソレヨリモ本質的ニ小サイコトデアル。即チ

解析幾何學的ニ考ヘレバ、定規ダケヲ出來ル作

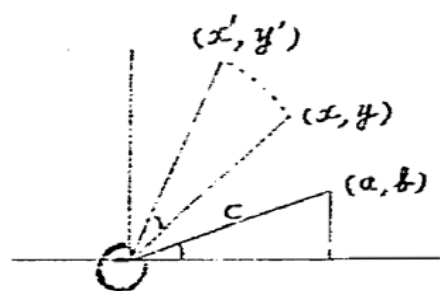
圖ハ一次方程式ヲ何度カ解クコトニナル

ノデ、ツマリ「有理運算」ニ相當スルガ、

コンパスヲ使ヘバ知ラレタ長サノ平方根ノ算出が出來ル。(上
圖)



然ルニ (L), (A), (B) デハ勝手ナ平方根ヲ出スノハ不可能
ナノデアアル。如何ニモ、(A), (B) ハ「平行移動」及ビ「廻轉」
が出來レバ出來ルコトが容易ニ見エルガ、「平行移動」ハ有
理運算ノ範圍ヲ出デズ、「廻轉」ノ方程式ハ



$$\begin{cases} x' = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y \\ y' = -\frac{b}{c}x + \frac{a}{c}y \end{cases} \quad (c^2 = a^2 + b^2)$$

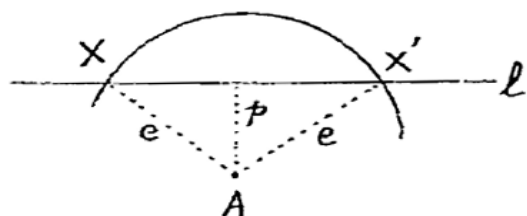
デアアルカラ、コトニ出テ來ル平方根 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ デハ根号ノ
下ニ必ず平方ノ和ガアル。コレハ任意ノ量デハナイ、例ヘバ
1 (デ表ハサレル長サ) ノミヲ知ラレタ長サトスルトキ、ソ
レカラ (L), (A), (B) デ作図サレル (長サヲ表ハス) 数ハ何レ
代數的ナ実数デアアルガ、ソノ共軛モ亦凡テ実数トナル。何者、
 a, b ヲ共軛ガ皆実数デアアル様ナ代數的數 (始メ「知ラレ
タ」ノハ勿論コノヤウナ數) トスレバ $\sqrt{a^2 + b^2}$ モ亦ヤハリ其
ノ様ナ數デアアルカラ、($\sqrt{a^2 + b^2}$ ノ共軛ハ $\pm \sqrt{a'^2 + b'^2}$ 、但シ $a',$
 b' ハ a, b ノ共軛、 a', b' ハ假定ニ由ッテ實数デアアルカラ、
 $a'^2 + b'^2 \geq 0$ 。ソノ平方根ハ虚數ニハナラナイ) 依ッテ共軛

が負 = ナルヲナ数 —— 例ヘシ $\sqrt{2}+1$ —— ノ平方根ノ作図ハ
(L), (A), (B) デハ出来ナイ!

問題ハソコデ「有理运算ト算法 $\sqrt{a^2+b^2}$ ノ有限回ノ適用
デ出来ル量ノ範囲如何? 共軌ガ皆実数ヲヤウナ代数的數
ハソノ中ニ含マレルカ?」ナドトナツテ純代数的ニ進ム。——
筆者ノ疑義ハコノ主流トハ離レテ、Hilbert ガ「(L), (A),
(B) デ出来ル」トイフ條件ヲ「定規ト開キノ定ツタコンパス
(Eichmass)ニ依ル」ト云ヒ替ヘテキル点ニアル。

§36. (第七版) デ、定理 63 トシテ Hilbert ハ (L),
(A), (B) デ出来ル作図題ハ定規ト開キノ定ツタコンパスデ出
来ルコトヲ証シテキル。

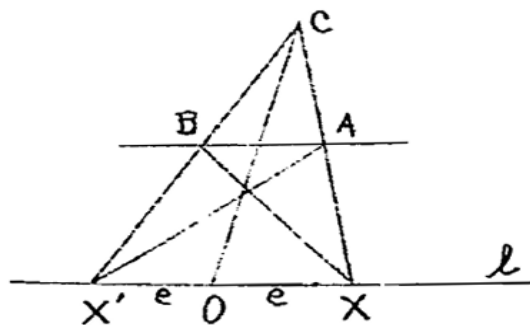
「定規ト開キノ定ツタコンパスデ」トイフノハ (L) ト次
ノ作図 (E) トノ可能ヲ假定スルノ意デアレ。



(E) 定ツタ長さ e ガアレトスル。
点 A ト直線 l トノ距離 $p (\geq 0)$
ガ $\leq e$ ナルトキ、 l 上ニ点 X
ヲ求メテ $AX = e$ ナラシメル

コト。

定理 63 ノ証明ハ初等幾何學的ヲ大略次ノ通り。



(A), (B) ヲ (L), (E) デ解ケバヨ
イガ先ニ補助ノ作図題:

(C) A カラ l = 平行線ヲ引
クコト。

(D) A カラ $\ell =$ 垂線ヲ引クコト.

ヲ右図 = 示シタヤウ = 解ク。(0ハ

$$l \text{ 上 } = \text{任意} = \text{上図の } C \text{ 7}$$
$$XA \text{ 上} = \text{任意} = \text{トルノデアル})$$

ソレが出来れば, (C), (E)

ヲ用キテ、右ノ如ク (A) ヲ解

キ、次 = (D), (A) ヲ利用シテ

(B) ヲ解ケルヨイ。

サテコノ逆「(L), (A),

(B) デ、(E) が出来るか?」 =

就テハ Hilbert = ハ explicit

= 何も言ッテナイ。然シ § 37

7. Kriterium f. d.

Ausführbarkeit geom.

Konstr. mittels Lineals und Eichmasses 7 題

名下 = $(L), (A), (B)$ = 依り作図が論ぜられ、定規とコンパス

デハ出来ルが、(L), (A), (B) デハ出来ヌ作図ノ例ヲ尋ゲテ後

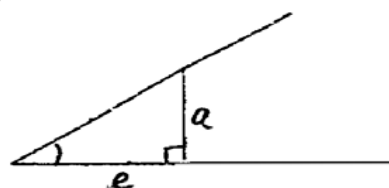
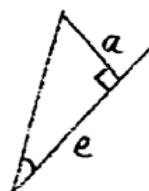
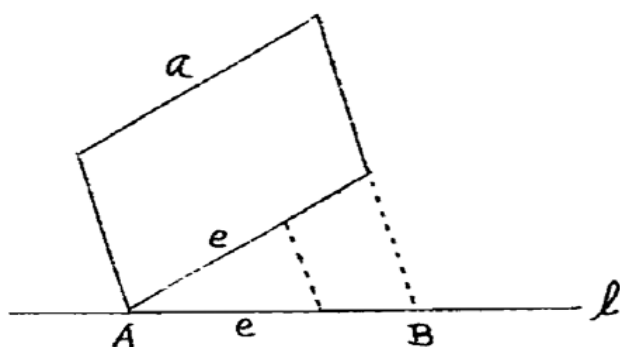
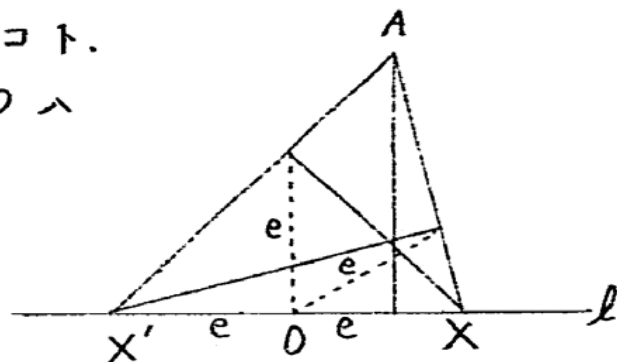
= $\wedge$ (p. 120 下, 方) " ((L), (A), (B) が出て来 + 1,) und kann

daher überhaupt nicht mittels Lineals und

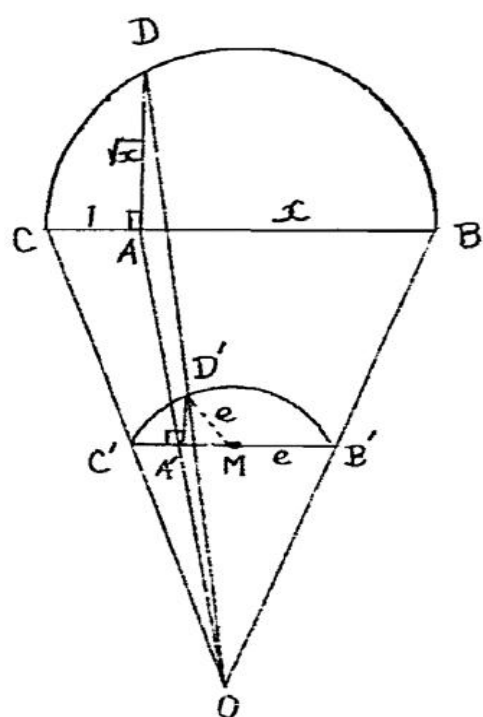
Fickmasses lösbar sein" ト書イテアル。然ルニ

筆者ハ下ノ如ク (L), (E) = 由ッテ 任意ノ 知ラレタ 長サノ 平方

想、作図が出来ル様=思フノデアル。



(L), (E) が出来るカラ、(A), (B), (C), (D) — 線分、角



ノ移動; 平行線, 垂線ノ作図——
が出来ル。

x ノ平方根ヲトルノ=、
 $\sqrt{1+x}=2e$ ナラバ (開キノ定マラ
ヌ) コンパスデスルト同様ニ出来
ル。サモナケレバ、左図ヲ次ノ順
序デ作ル。

A, B, C ヲ先ヅ定メル (線分ノ
移動) AB ニ平行線ヲ引イテ、ソ
ノ上ニ (任意ニ) 一点 M ヲトル、

B', C' ヲ (E) デ定メ、 BB', CC' 、交ハリ O 、 $OA, B'C'$ ノ交リ
 A' ヲ (L) デ定メル、 A' カラ $B'C'$ ニ、 A カラ BC ニ夫々垂線ヲ
立テ、 D' ヲ (E) デ定ムレバ、 D ハ OD' ト A カラ BC ヘノ垂線
トノ交リトシテ出ル。

コレガ正シケレバ、コンパスノ「開キヲ定メル」ノハ無
意味デアラウ。

——コレハ小サナ初等幾何學的ノ注意デ、當ツテキヨウ
トキマイト、*Hilbert* 第七章ノ興味ニ変化ハナイ。唯々、
若シコレが當ツテキルトスレバ、三十年來之レニ氣付カレナ
カツタノハ稍々不思議ニ感ズル。——トイフノハ或ハ又筆者
ガ文献ニ暗イセイデ、風ニ知ラレタコトデモアラウカ。