OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	一般収斂定理
Author(s)	泉, 信一
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 34, p. 1-3
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74026
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

104. 一般收斂定理

泉　信一

1. Bochner が彼ノ著書"Fouriersche Integrale, 1933"ニ於テ次ノ二ツノ定理ヲ証明シタ。

定理1. 若シ(1°)$f(\xi)$が$(-\infty,+\infty)$ニ於テ有界デ，(2°)点$\xi=x$ニ於テ$f(\xi)$が連続及ビ(3°)$|K(\xi)|$が$(-\infty,+\infty)$ニ於テ可積分ナラバ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{\xi}{n}\right)K(\xi)\,d\xi = f(x)\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\,d\xi \quad\cdots\cdots(A)$$

定理2. 若シ(1°)$|f(\xi)|$が$(-\infty,+\infty)$ニ於テ可積分，(2°)点$\xi=x$ニ於テ$f(\xi)$が連続，(3°)$|K(\xi)|$が$(-\infty,+\infty)$デ可積分，(4°)$K(\xi)$が$(-\infty,+\infty)$デ有界及ビ(5°)$|\xi|\to\infty$ノトキ$K(\xi)=O(|\xi|^{-1})$トスルナラバ、(A)が成立スル。

本年一月ノ學士院記事デ、私が次ノ定理ヲ証明シマシタ。

定理3. 若シ(1°)$\dfrac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}$及ビ$\dfrac{|f(\xi)|^2}{1+|\xi|}$が$(-\infty,+\infty)$ニ於テ可積分，(2°)点$\xi=x$ニ於テ$f(\xi)$が連続，(3°)$|K(\xi)|$及ビ$|\xi K^2(\xi)|$が$(-\infty,+\infty)$ニ於テ可積分ナラバ、(A)が成立スル。

2. 定理3ハ次ノ様ニ一般ニ出來ル。

定理4. 若シ(1°)$\dfrac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}$及ビ$\dfrac{|f^p(\xi)|}{1+|\xi|}$$(p>1)$が$(-\infty,+\infty)$デ可積分，(2°)点$\xi=x$ニ於テ$f(\xi)$が連続及ビ(3°)$|K(\xi)|$

及ビ $|\xi^{q-1}K^q(\xi)|$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ ガ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ可積分ナラバ、(A)ガ成立スル。

コノ定理ヲ証明スルニハ、定理3ヲ証明スルトキニ用ヒタ Lemma 1 ト以下述ベル補助定理トヲ用ヒテ、定理3ト全ク同様ニヤレバヨイ。但シ Schwarz ノ不等式ヲ用ヒタ所ヲ Hölder ノ不等式ニカヘレバヨイ。

補助定理. 若シ $K^*(\xi)$ ガ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ L^q-class ニ属スルトキ

$$K_\lambda^*(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K^*(\xi)\,\frac{\sin^2\lambda(\xi-\eta)}{\lambda(\xi-\eta)^2}\,d\xi$$

トオクナラバ,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|K^*(\xi)-K_\lambda^*(\xi)\right|^q d\xi=0.$$

之レヲ証明スルニハ、$K(\xi)$ ガ Step function ノトキ特ニ

$$K(\xi)=1,\quad \xi\in(a,b);\quad K(\xi)=0,\quad \xi\bar{\in}(a,b)$$

ノ場合ヲ証明スレバヨイ。コノトキニハ $K_\lambda^*(\xi)$ ガ容易ニ計算出来ルカラ、容易ニ求ムル結果ヲ得ル。(詳細ハ Wiener, Fourier Integral and Certain of its applications, Lemma 79 ヲ参照)

3. 定理4ニ於テ $p\to1$ 及ビ $p\to\infty$ ノ極限ノ場合ヲ考ヘル。L^∞ ハ通常ノ様ニ有界函数ノ class トスル。

先ヅ $p\to\infty$ トスルトキ、$q\to1$. $\frac{|f^p(\xi)|}{1+|\xi|}$ ガ $(-\infty,+\infty)$

ニ可積分ナコトハ $|f^p(e^x)|$ ガ $(0,\infty)$ デ可積分ナコトト同ジデアル；故ニ $f(\xi)$ ノ有界ナコトニナル。$\frac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}$ ノ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ可積分ナコトハ $f(\xi)$ ノ有界ナコトニヨッテオキカヘラレルコトハ、"Lemma 1" カラ明カデアル。又 $\varphi\to 1$ ノトキ $\xi^{\varrho-1}K^{\varrho}(\xi)\to K(\xi)$、故ニ此ノ場合ニハ定理1ヲ得ル。

次ニ $\varphi\to 1$ ナラシメルトキ、定理4ノ條件(1°)ハ $\frac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}$ ガ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ可積分ナコトニナル。$|\xi^{\varrho-1}K^{\varrho}(\xi)|$ ノ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ可積分ナコトハ $\{e^xK(e^x)\}^{\varrho}$ ガ $(0,\infty)$ デ可積分ナコトデアル。故ニ $\varrho\to\infty$ ノトキハ、$xK(x)=O(1)$ トナル、故ニ次ノ定理ヲ得ル。

定理2'. 若シ(1°) $\frac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}$ ガ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ可積分、(2°)点 $\xi=x$ ニ於テ $f(\xi)$ ガ連続、(3°) $K(\xi)$ ガ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ可積分、及ビ(4°) $K(\xi)$ ガ $(-\infty,+\infty)$ デ有界ナラバ(A)ガ成立スル。

1ノ定理ハ累シテ成立スルダラウカ、之ハ定理2ノ條件(1°)ガ一般ニナリ、條件(5°)ガ不用ニナッテヨル。

4. 何レニセヨ、定理4ハ定理3ヲフクミ、定理1及ビ2ヲ(大体ニ於テ)極限ノ場合ニモッコトニナル。