



Title	Denjoy 積分ノ擴張ニツイテ(1)
Author(s)	泉, 信一
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 35, p. 2-9
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74029
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

107. Denjoy 積分ノ擴張ニツイテ⁽¹⁾

泉 信 一

ユゝニツノ新シイ積分ヲ定義スル。第一ノ積分ハ一般 Denjoy 積分ヲ Verblunsky が *Fund. Math.*, 23 (1934)ニ於テ擴張シタモノヲ修正シタモノデ、第二ノ積分ハ其種 Denjoy 積分ヲ同様ノ方法デ拡張シタモノデアル。

以下用ヒル術語ハ Saks ノ積分論 (*Théorie de L'Intégrale* 1932) ニヨル。

[I] $F(x)$ ヲ閉區間 $I = (a, b)$ ニ於テ定義サレタ有限函数トスル。モシ $F(x)$ が I ニ於テ次ノニツノ條件ヲ満足スルトキ、 $F(x)$ ハ *approximately generalized absolutely continuous* デアルトイフ。即チ

(A) $F(x)$ が連続函数、*approximate derivative* デアル。

(B) I ノ任意ノ開集合 E ニ對シテ、 E ノ適當ナ *portion* P

(1) 最近出タ Kennedy 及ビ Pollard, 論文ニ Denjoy 積分ノ拡張ガアリマス。ソノ論文ノ脚註ニ著者ノ第一ノ論文ト比較シテ両者ガ本質的ニチガフコトヲ述ベテアリマス。ケレドモ著者ノ第二ノ論文ノ結果ハ Kennedy 及ビ Pollard ノト本質的ニ同シデス。更ニ Ridder, *Fund., Math.*, 22 (1934) 參照。

ヲトルトキ、 $F(x)$ ハ P ニ於テ *generalized absolutely continuous* デアル。

モシ $F(x)$ が I ニ於テ *approximately generalized absolutely continuous* ナラバ、 $F(x)$ ハ (AGAC)-

class = ザクスルトイヒ、 $F_I(x) \in (AGAC)$ 又ハ單 =
 $F(x) \in (AGAC)$ トカフ。

又 $F(x)$ が次ノニツノ條件ヲ満足スルトキ *approximately generalized absolutely continuous*^{*} デアルトイフ。乃チ

(A^{*}) $F(x)$ が連続函数ノ微分係数デアル。

(B^{*}) I ノ任意ノ閉集合 E = 對シテ、 E ノ適當ナ portion P イトルトキ、 $F(x)$ ハ P = 於テ *generalized absolutely continuous*^{*} デアル。

モシ $F(x)$ が I = 於テ *approximately generalized absolutely continuous*^{*} ナラバ、 $F(x)$ ハ $(AGAC^*)$ -class = ザクスルトイヒ、 $F_I(x) \in (AGAC^*)$ 又ハ $F(x) \in (AGAC^*)$ トカフ。

然ルトキ次ノ定理ヲ得ル。

定理 1. モシ $F(x)$ が I = 於テ $(AGAC)$ -class = 属スルナラバ、 $F(x)$ ハ I ノ殆ンドスベテノ点デ *finitely approximately differentiable* デアル。

定理 2. モシ $F(x)$ が I = 於テ $(AGAC^*)$ -class = 属スルナラバ、 $F(x)$ ハ I ノ殆ンドスベテノ点デ *finitely differentiable* デアル。

2 $f(x)$ が區間 I = 於テ定義サレテルトスル。モシ一
点 $\xi (\in I)$ ノ任意ノ近傍 = 於テ $f(x)$ が (D) -integrable

デナイナラバ、 ξ ヲ $f(x)$ ノ *Singular point* トイフ；
 又 (D^*) -integrable デナイナラバ、 ξ ヲ $f(x)$ ノ
Singular^{} point* トイフ。（モシ ξ ガ I ノ端ノ点ナラバ、
 ξ = 於テ片側ノ近傍ダケヲ考ヘル）

モシ $f(x)$ が次ノ三ツノ條件ヲ満足スルトキ、 $f(x)$ ハ
integrable in the approximate Denjoy sense
 又ハ單ニ (AD) -integrable トイヒ、 $f(x)$ ノ I = 於ケ
 ル (AD) -integral $F(b) - F(a)$ ヲ次ノ三ツノ演算デ
 計算スル。乃チ

條件 I. $f(x)$ ノ I = 於ケル *Singular points* ノ作ル
set ハ *non-dense* デアル。

演算 I. (α, β) が閉集合デ、 $f(x)$ ノ *singular point*
 ヲフクマナイナラバ

$$F(\beta) - F(\alpha) = (D) \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

條件 II. モシ $F(\delta) - F(\gamma)$ が $\alpha < \gamma < \delta < \beta$ ヲ満足スル
 スベチノ γ 及ビ δ = 對シテ定義セラレテルナラバ、 $F(x)$ ハ
 (α, β) = 於テ (D) -integrable デ且ツ

$$ap. \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} (D) \int_{\beta-h}^{\beta} \{F(x) - F(\delta)\} dx^{(1)}$$

(1) *ap. lim* ハ Saks ノ $\text{ap.} = \text{approximate limit}$ 即チ *lim ap*
 デアル。

及ビ

$$ap. \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} (D) \int_{\alpha}^{\alpha+h} \{F(\gamma) - F(x)\} dx$$

が存在スル。

演算 II. モシ $\alpha < \gamma < \delta < \beta$ ナラバ

$$F(\beta) - F(\delta) = ap. \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} (D) \int_{\beta-h}^{\beta} \{F(x) - F(\delta)\} dx$$

及ビ

$$F(\gamma) - F(\alpha) = ap. \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} (D) \int_{\alpha}^{\alpha+h} \{F(\gamma) - F(x)\} dx$$

條件 III. モシ任意, non-dense closed set $E =$
 對シテ、 E ノ各々, contiguous intervals (a_n, b_n)
 = 對シ $F(b_n) - F(a_n)$ が知ラレテルトキ、次ノ條件ヲ満足
 スル E ノ portion P ガアル。凡テ

1°. $f(x)$ ハ P ニ於テ (D)-integrable ナラヌ。

2°. P ノ上限及ビ下限ヲソレゾレ c 及ビ d トシ、 P ノ
 $(c, d) =$ 關スル contiguous intervals, systemヲ
 $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$ トスルトキ

$$\sum_n |F(\beta_n) - F(\alpha_n)| < +\infty. \quad (1)$$

演算 III. 上ニ求メタ $(c, d) =$ 對シテ

$$F(d) - F(c) = (D) \int_P f(x) dx + \sum_n \{F(\beta_n) - F(\alpha_n)\}.$$

モシ $f(x)$ が $I = (a, b) =$ 於テ (AD)-integrable ナラ

バ

$$F(b) - F(a) = (AD) \int_a^b f(x) dx$$

ト書ク。

以上ノ (AD) -integral ノ定義ニ於テ. *Singular point*, (D) -integral, *ap. lim* 及ビ (I) ノソレゾレ *Singular* point*, (D^*) -integral, *lim* 及ビ

$$\sum \omega_k < +\infty$$

ヲオキカヘテ得ル積分ヲ (AD^*) -integral トイヒ、 I ニ於テ (AD^*) -integral 7

$$F(b) - F(a) = (AD^*) \int_a^b f(x) dx$$

ヲ表ハス。コノ ω_k ハ $F(x)$, (α_k, β_k) = 於ケル *oscillation* トスル。

[3] カク定義サレタ (AD) -integ. 及ビ (AD^*) -integ. ハソレゾレ (D) -integ. 及ビ (D^*) -integ. ノ擴張デアル。更ニ次ノ定理が成立スル。

定理 2. モシ $f(x)$ が $I = (a, b)$ ニ於テ (AD) -integrable ナ、且ツ

$$F(x) - F(a) = (AD) \int_a^x f(t) dt \quad (a < x \leq b)$$

ナラバ、 $F_I(x) \in (AGAC)$ 。

定理 2*. モシ $f(x)$ が $I = (a, b)$ ニ於テ (AD^*) -integrable ナ、且ツ

$$F(x) - F(a) = (AD^*) \int_a^x f(t) dt$$

ナラバ、 $F_I(x) \in (AGAC^*)$ 。

定理 3. $F_I(x) \in (AGAC)$ ナラバ、 $ADF(x)$ ハ $I = (a, b)$

= 於テ (AD) -integrable ナ、且ツ

$$F(b) - F(a) = (AD) \int_a^b AD F(x) dx$$

定理 3*. $F_I(x) \in (AGAC^*)$ ナラバ、 $F'(x)$ ハ $I=(a,b)$

= 於テ (AD^*) -integrable ナ、且ツ

$$F(b) - F(a) = (AD^*) \int_a^b F'(x) dx$$

[4] $\mathcal{S}$, Saks, 意味 = 於ケル (abstract) integral

(operation) トスル。乃チ任意ノ區間 $I=(a,b)$ = 對シテ

函数ノ class $K(\mathcal{S}, I)$ が對應シ、各々ノ $f(x) \in K(\mathcal{S}, I)$ =

對シテ有限ノ實數 $\mathcal{S}(f, I) = (\mathcal{S}) \int_I f(x) dx$ が對應スルモノ

トスル、 $\mathcal{S}(\mathcal{S}, I)$ ヲ $f(x)$ ノ I = 於ケル $(\mathcal{S})$ -integral

トイフ。

但シ indef. $(\mathcal{S})$ integral ノ連続性ヲ $(\mathcal{E}, !)$ 連続性ナ

オキカヘル。乃チ $\mathcal{S}^*(f)$ ハ (D) -integrable ナ

$$\text{ap. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \mathcal{S}^*(f) dx$$

が存在スルモノトスル。 $\mathcal{S}^*$ ナ integral ナ、 $\mathcal{S}$ = 於ケ

ル (D) -integral 及ビ ap. lim ノ代リ = (D^*) -integ-

ral 及ビ lim ヲトルモノトスル。

$(\mathcal{S})$ -integral が次ノ二ツノ條件ヲ満足スルトキ com-
plete ナアルトイフ。乃チ

(I) モシ、 $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ ナ満足スルスベテノ α' 及ビ β' = 對
シテ $(\mathcal{S}) \int_{\alpha'}^{\beta'} f(x) dx$ が存在シ、 $(\mathcal{S}) \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ が $J=(\alpha, \beta)$

= 於テ (D)-integrable ナ、且ツ

$$ap. \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} (D) \int_{\beta-h}^{\beta} dx(\delta) \int_{\beta'}^x f(t) dt$$

及ビ

$$ap. \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} (D) \int_{\alpha}^{\alpha+h} dx(\delta) \int_{\alpha'}^x f(t) dt$$

ガ存在スルナラバ

$$\begin{aligned} \delta(f, J) = & ap. \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} (D) \int_{\beta-h}^{\beta} dx(\delta) \int_{\beta'}^x f(t) dt \\ & + ap. \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} (D) \int_{\alpha}^{\alpha+h} dx(\delta) \int_{\alpha'}^x f(t) dt + (\delta) \int_{\alpha'}^{\beta'} f(t) dt. \end{aligned}$$

(II) モシ任意, non-dense closed set E = 對シテ E , contiguous intervals ; 各々 = 於テ (δ) -integrable ナ. E , 適當ナ portion P = 對シテ

(1°). $f(x)$ ガ P = 於テ (δ) -integrable ナ

(2°). P ノ上限及ビ下限ヲ c 及ビ d トシ、 P ノ (c, δ) = 關スル contiguous intervals, system ヲ $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$ トスルトキ

$$\sum_n \left| (\delta) \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x) dx \right| < +\infty \quad (2)$$

然ルトキ $f(x)$ ハ (c, d) = 於テ (δ) -integrable ナ

$$(\delta) \int_c^d f(x) dx = (\delta) \int_P f(x) dx + \sum_n (\delta) \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x) dx$$

以上ノ條件 (I) 及ビ (II) = 於テ (D)-integral, ap. lim
及ビ (2) ノ代リ = ソレゾレ (D*)-integral, lim 及ビ

$$\sum_n \omega(\delta^*, f; \alpha_n, \beta_n) < +\infty$$

ヲトルトキ、(D*)-integral $\wedge$ complete* デアルトイ
フ。コノ $\omega(\delta^*, f; \alpha_n, \beta_n)$ $\wedge$ (D*)-integral,
(α_n, β_n) = オケル oscillation トスル。

然ルトキ次ノ定理ヲ得ル。

定理 4. (AD)-integral $\wedge$ (D)-integral $\Rightarrow$ 合
ム the weakest complete integral δ デアル。

定理 4*. (AD*)-integral $\wedge$ (D*)-integral $\Rightarrow$
フケム the weakest complete* integral δ^* デ
アル。

[5] Ridder が (D)-integral 及ビ (D*)-integral
ヲ Perron ノ方法ヲ定義シタト同様ノ方法ヲ、(AD)-in-
tegral 及ビ (AD*)-integral $\Rightarrow$ Perron ノ方法ヲ定
義スルコトが出来ル。