



Title	Stoneノ定理ニ就テ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 35, p. 10-12
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74030
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

108. Stone の定理 = 就テ

吉田 耕作 (阪大)

Hilbert Space H = ~~ある~~ unitary operator,
Schar U_t が群性質:

$$U_t U_s = U_{t+s}, \quad (U_t)^{-1} = (U_t)^*, \quad -\infty < t < +\infty$$

($*$ は adjoint operator を示ス) 有スルナラバ

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} d(E(\lambda) f, g)$$

但シ $f, g \in H$, $E(\lambda)$ は所謂 *resolution of the identity*.
之レが Stone の定理ヲヤル。Stone の $(U_t f, g)$
が t の連続函数ト云フコトヲ假定シテ上ノ定理ヲ得タガ
J. von Neumann の連続性可測性ヲ假定スレバ連続性
ノ出ルコトヲ示シタ。

所ヲ上ノヤウナ定理ハ之レヲ種々ニ應用スル見地カラ考ヘ
テモ出來ルダケ假定ヲ少ナクシテ一般ナモノニスルノが望マ
シイ。

筆者ハ F. Riesz: *Über Sätze von Stone und Bochner*, *Acta Szeged* 6ヲ讀ソデ、Stone の定
理が (i) linear (ii) hermitian metric (f, g)
ノアル (iii) *vollständig* ナ空間 H' (Hilbert space
ノ様ニ separability ヲ要求シナイ) デモ成立スルヤウ
ニ思フノデスガ、無知ナタメニ或ハ思ヒ違ヒヲシテルカモ知
レマセン。御高教ヲ願フ次第デス。

偲テ H' デ考ヘマス 連続函数 $(U_t f, f) = p(t)$ ハ
 Bochner ノ所謂 *positive-definite* ナ函数ニナリマ
 スカラ

$$p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} d\varphi(\lambda)$$

但シ $\varphi(\lambda)$ ハ $\varphi(-\infty) = 0$, $\varphi(\lambda+0) = \varphi(\lambda)$ ナル條件デ
unique = 定ル *limited* 且ツ *monotone* ナ函数デ
 ス。之レカラ

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} d\varphi(\lambda; f, g)$$

ココニ $\varphi(\lambda; f, g)$ ハ f, g ヲ與ヘルト λ ノ *variations*
borné ナ函数。

ココ迄ハ F. Riesz ト全ク同様デス。コユデ $\varphi(\lambda; f, g)$
 ガ *resolution of the identity* $E(\lambda) = \text{ヨツテ}$
 $(E(\lambda) f, g)$ ト書ケルトイフ所デ Riesz ハ H ガ *separable*
 ト云フコトヲ *essential* = 使ツテヲラナイノデ、例ヘバ
 F. Rellich: *Spectraltheorie in nicht separab-*
len Räumen, Math. Ann. 110 Bd. 3 Heft, 論法
 ヲ使ツテマレルト思フノデス。

ココデ筆者ハ $(U_t f, g)$ ガ t ニツキ *messbar* トイフ
 假定シカナイトキ = *separability* ナリ = 定理ガ成立ス
 ルカシナイカガ問題ダロウト思ヒマス。

Riesz ノ証明デハ *separability* ヲ *essential* = ?
 使ツテルマウデスガ。

次 = E. Hopf の Stz. Ber. Berlin 1932 XIV =
 於て Stone の定理カラ U_t が同ジク abelian group
 の character 7モツ V_t, W_t を分解スルコトヲ示シマ
 シタ: $U_t = V_t + W_t$ 且ツ

$$(V_t f, V_t g) = (V_0 f, V_0 g),$$

$$(W_t f, W_t g) = (W_0 f, W_0 g).$$

但シ V_t は $V_t f = F(t)$ が Hilbert space の metric
 の意味デ fast periodic 又 W_t は

$$\lim_{(b-a) \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b |(W_t f, g)|^2 dt = 0$$

ヲ満足スル。非常ニ興味アル結果デス。

Hopf の証明ヲミルト $E(\lambda)$ の Unstetigkeitsstelle
 が高々 abzählbar ト云フコトヲモトニシテヲリマス。
 併シ、若シ H' が separable デナイト U_t が unitary
 デアツテモ $E(\lambda)$ の Unstetigkeitsstelle は必ずシモ
 abzählbar デハアリマセソ。然シ f, g ヲ與ヘタトキニ
 $\varphi(\lambda; f, g) = (E(\lambda) f, g)$ は variations borné
 デアリマスカラ、ソノ Unstetigkeitsstelle は高々
 abzählbar (f, g ヲ與ヘルト定ル)。従ツテ Hopf の
 議論ヲ其ノマ、使フト

與ヘラレタ f, g = 對シテ, U_t が上ノ如キ性質ヲモツ部
 分 V_t, W_t = 分解スル。(但シ $(V_t f, g)$ が普通ノ意味デ fast
 periodic) ト云フコトハ云ヘル様ニ思ヒマス。

之迄ノ議論が正シケレバ、相當一般ナ應用が可能ナヤウニ
 思ヒマス。