



Title	Khinchine ノ 一定理ニ就テ
Author(s)	森本, 清吾
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 37, p. 2-7
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74039
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

117. Khinchine の定理 = 就テ

森本清吾 (物理學校)

Khinchine カラ 先日 Über ein metrisches

Problem der additiven Zahlentheorie ト云フ論文ヲモライマシタ。

雑誌名ハ、ハツキリシマセンが欄外 = МАТЕМАТИЧЕСКОЕ СБОРНИК, Т. 40, No. 2. トアリマシタ。コノ中ニ次ノヤウナ定理ガアリマシタ。

定理. 数列 φ ト次ノ数列

$$1, 2^2, 3^2, 4^2, \dots \quad (1)$$

トノ和数列ヲ ψ トスル。 φ ノ密度ガ α ヨリ小サクナケレバ ψ ノ密度ハ $\alpha(1+\gamma\alpha(1-\alpha)^2)$ ヨリ小サクナイ。但シ γ ハ絶對常數デアール。

コノデ数列トハ自然數ノ中カラソノ一部ヲ選ビ出シタ數群ヲ云フノデ、同ジ數ガ二度表ハレテ來ルヤウナコトハ考ヘテ居マセン。ソレ故小サイモノカラ順次大キイモノヘト並ンデ居ルト思ツタ方がヨイデシヨウ。ニツノ数列 φ, φ' ノ和数列トハ、 φ ノ數、 φ' ノ數及ビ φ ノ一數ト φ' ノ一數ノ和デアルヤウナ數全体カラ成ル数列ヲ云ヒマスガ、コノトナモ勿論同一ノ數ハ一度レカ數ヘマセン。数列 φ ノ密度トハ α ヨリ小サイ $\varphi =$ 屬スル數ノ箇數ヲ $\varphi(n)$ トシタトキ

$$\varphi(n) \geq \alpha n$$

ガ常ニ成立スルヤウナ數 α ヲ云ヒマス。密度ガ α ヨリ小サクナイニツノ数列ノ和数列ノ密度ハ α ヨリ大キイ或ル數ヨリ小サクナイト云フ種類ノ定理ハ今マデ幾ツカ發表ナレテ居ルソウデ Landau / Göttinger Nachrichten

1930, S. 269. ニアル論文ナドソノ代表的ナモノダソウデス。上ノ定理ハ (1) ノ密度ガ 0 ダアルト云フコトカラシテ、コノ種ノ研究デ一歩新シイ方面ニフミ出シタモノダト書イテアリマス。コノ定理ノ証明ハ思ヒ、外面倒デ而モソノ結果ハ思ヒノ外芳シクナイノデスガ、*Khinchine* モ之ヲ認メテ居ルト見ヘ、セメテ $(1-\alpha)^2$ ノ 2 ヲトリタイ、コレハ可能ノヤウニ思ハレルガ未ダ出来ナイト書イテアリマス。ソコデ私ハコノ 2 ヲトツテ見タイト思フノデス。

コノ目的ノタメ次ノ語法ヲ用ヒマセウ。密度ト云フ意味ヲ擴張シテ $a \leq x \leq b$ ナル x 、由 φ = 属スル数ノ数ヲ $\varphi(a, b)$ トシ、コノ間ノ自然数ノ数ヲ $[a, b]$ トシタトキ $\frac{\varphi(a, b)}{[a, b]}$ ヲ (a, b) ニ於ケル φ ノ密度ト呼ビマセウ。ソレカラ φ = 属スルニ数 m, n ノ間ニ φ = 属サナイ数ノミアルトキ、コヲ φ ノスキマ (m, n) ト呼ビマセウ。ソコデ *Khinchine* ノ定理デ α ガ $\frac{1}{2}$ ノ場合ヲ考ヘマスト、 ψ ノ密度ハ $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{4}\right)$ ヨリ小サクナイコトニナリマス。之ヲ用ヒルコトニシマセウ。

茲デ証明スベキコトハ

N ヨリ大キクナイスベテノ n = 對シテ $\varphi(n) \geq \alpha n (\alpha < \frac{1}{2})$ ナラバ $\psi(N) \geq \alpha \left\{1 + \gamma' \alpha (1 - \alpha)\right\} N$ デアル。

ト云フコトデアリマス。 $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ノトキハ $1 - \alpha$ ハ 0 = 近クナイカラソノ肩ノ 2 ハ向題ニナラナイノデス。

$(1, N)$ = 於ケル最モ大キイ (N = 近イコト) スキマヲ

(b_1, a_1+1) トシマス。 b_1 より大キクナイ自然数ヲ C_1 ト
 シ $(C_1, a_1) =$ 於ケル φ ノ密度ヲ考ヘマセウ。 C_1 が b_1 ト
 ナレバコノ密度ハ $\frac{1}{2}$ より大キクナイコトハ明デスシ $(1, a_1)$
 $=$ 於テハ密度ハ $\frac{1}{2}$ より大キイノデスカラ C_1 ヲ適當ニトリコ
 ノ密度ガ $\frac{1}{2} =$ 等シイヤウニスルコトが出来マス。 $[(C_1, a_1)$
 $=$ 於ケル密度ガ $\frac{1}{2}$ より小キイトキハコノ間ノ φ ノ数ハ全部
 ノ自然数ノ半ハヨリ小サイノデアルカラ、 φ ノ数ガ一ツ増シ
 テモ半ハヨリ大キクナルコトハナイカテ、密度ガ $\frac{1}{2}$ より小
 ナイトキト大キイトキトノ間ニ必ず $\frac{1}{2} =$ 等シイトキガアル
 カヤウナ C_1 ノ中ニ番大キイモノヲトリマセウ。但シコノトキ
 C_1-1 が $\varphi =$ 属サナイトキハ $(C_1-1, a_1) =$ 於ケル密度ハ
 $\frac{1}{2}$ より小サクナルカブ又 C_1 ヲ小サクシテ之レガ $\frac{1}{2} =$ 等シ
 イヤウニスル。サウスルト $(C_1, a_1) =$ 於ケル φ ノ密度ハ $\frac{1}{2}$
 $=$ 等シク C_1-1 ハ $\varphi =$ 属シ C_1 より大キナ数 d_1 ニツイテハ
 $(d_1, a_1) =$ 於ケル密度ガ $\frac{1}{2}$ より大キクナイヤウニ出来マス。
 サウスルト $(C_1, d_1-1) =$ 於ケル密度ハ $\frac{1}{2}$ より小サクナイ。
 次ニ C_1 より小サイ最大ノ $(C_1 =$ 近い意) スキマヲ (b_2, a_2+1)
 トシ之レカラ上ノヤウナ方法ヲ区間 (C_2, a_2) ヲ作りマス。
 之レヲ繰リカヘシテ行ツテ $(1, N)$ ノ中ノスキマヲ全部同様
 ノ性質ヲモツ区間 $(C_n, a_n) (C_{n-1}, a_{n-1}) \dots (C_1, a_1)$ デオ
 ホフコトが出来マス。

ソコデ区間 $(C_i, a_i) =$ 於ケル φ ノ密度ヲ考ヘマセウ。
 之レガタメニハ (C_i, a_i) ノ間ノ φ ノ数カラ C_i-1 ヲ引イタ

列ヲ考ヘルト之レハ密度 $\frac{1}{2}$ ノ列ヲ作り之レト (1) ノ数トノ和数列 $= C_i - 1$ ヲ加ヘタモノガ $(C_i, a_i) =$ 於ケル $\psi =$ 含まレマス。 $(C_i - 1 \in \varphi =$ 属シマスカラ (1) ノ数 $= C_i - 1$ ヲ加ヘタ数 $\in \psi =$ 属シマス)。故 $= (C_i, a_i) =$ 於ケル ψ ノ密度ハ $\frac{1}{2}(1 + \frac{\gamma}{4})$ ヨリ大キイノデス。

サテ $\varphi(N) = \alpha' N$ ($\alpha' \geq \alpha$) トシマスト $(1, N) = \varphi =$ 属サナイ数ハ $(1 - \alpha')N$ 箇アルワケデス。コレ等ハ皆何レカノ (C_i, a_i) 内ニ、 γ 度ソノ半余ヅツ入ッテ居マス。シカルニ $\psi =$ 於テハ (C_i, a_i) 内ニ之レニ属サナイ数ハソノ $\frac{1}{2}(1 - \frac{\gamma}{4})$ ヨリ少クレカ入ッテ居ナイノデスカラ $(1, N)$ 間ニ $\psi =$ 属サナイ数ハ

$$(1 - \alpha')(1 - \frac{\gamma}{4})N$$

箇ヨリ少クシカアリマセン。故ニ

$$\begin{aligned}\varphi(N) &\geq \left\{1 - (1 - \alpha')(1 - \frac{\gamma}{4})\right\}N \\ &= \left\{\alpha' + \frac{\gamma}{4}(1 - \alpha')\right\}N\end{aligned}$$

($\frac{\gamma}{4} < 1$ デアルカラ)

$$\begin{aligned}&\geq \left\{\alpha + \frac{\gamma}{4}(1 - \alpha)\right\}N \\ &\geq \left\{\alpha + \frac{\gamma}{4}\alpha(1 - \alpha)\right\}N\end{aligned}$$

コレデ証明デキタワケデアリマス。

尚コレハ余カノコトデスが上ノ証明ト同様ノ証明ハ $\alpha < \frac{1}{2}$ ノトキモ行フコトが出来マス。故ニ $\alpha = \frac{1}{2}$ ノトキ *Khinchine* ノ定理が成立スルコトヲ假定スレバ他ノ α ニツイテハ上ノヤウニ証明デキルワケデアリマス。ソレ故

$\alpha = \frac{1}{2}$ / トキ *Khinchine* / 定理がモット簡單ニ証明
 デキルカ、又ハ γ / 値ヲ大キク (*Khinchine* / 論文デ
 ハ $\gamma = \frac{1}{2} \times 10^{-8}$ ト云フトンデモナイ小サナ数デス) スルコ
 トが出来レバコノ証明法ハ更ニ有効ニナルヲケデス。

—— (四月一日受取) ——