OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	或ル積分方程式ニ就テ
Author(s)	佐藤, 常三
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 39, p. 3-6
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74046
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

124. 或ル積分方程式ニ就テ

佐藤　常三（京大）

コレハ過日、日本數物學會年會講演デ渡辺義勝先生ガ——尤モ最一般ナル場合ノ証明ハ第一種フレドム積分方程式ノ一種ノ形トナリ

$$(A)\qquad \int_{x_1}^{x_2} \lambda(x,t)\varphi(t,u)\,dt = \varphi(x,u)$$

茲ニ　$0 \leqq a \leqq u \leqq x_0 < x_1 < x_2 < x < +\infty$

但シ　$\varphi(x,u) = \dfrac{k}{x^k}(x-u)^{k-1}$

又ハ　$\dfrac{1}{x\Gamma(k)}\left(\log\dfrac{x}{u}\right)^{k-1}$　$(k>0)$.

上式カラ未知函數 $\lambda(x,t)$ ヲ求メネバナラヌガ未解決デアル云々——下述ベラレテ誰カ鍵ヲ與ヘテ呉レト仰言テレタガ、茲デ私ハ先生ニ鍵ヲオ渡シスルノデヌナクテ、誰カニ私ノ下手ナ鍵ノ作リ方ニ對シテ御高評ガ願ヒタイ。

扨テ(A)ナル函數方程式ヲ在來ノ Fredholm 型トミルタメニハ点 (x,t) ハ square-domain $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $x_1 \leqq t \leqq x_2$ ニナケレバナラナイノダガ，但シ書キヲミルトサウデナイ。

次ニ u ヲ parameter トミテ $\varphi(x,u)$ ヲ u ノ一ツノ値ニ對スル固有函数トミレバ、其レガ屬スベキ核ハ $\lambda(x,t)$ デアルカラ、當然 $\lambda(x,t)$ ハ亦 parameter u ノ函数デナケレバナラナイ、更ニ $\varphi(x,u)$ ノ形ヲミルト $0 \leqq u \leqq x_0 < x_1 < x_2 < x$ デアルカラ u ニツイテハ常ニ Taylor's series ニ展開可能ト云フコトニナツテクルカラ (A) ナル等式關係ガ成立スルコトハ、怪シク思ハレテクル。

今函数 $K(x,t)$ ガ $0 \leqq u \leqq t \leqq x < +\infty$ ナル triangular region デ define セラレタ連続函数トシテ

$$(1)\qquad \int_u^x K(x,t)(t-u)^{\beta}\,dt = (x-u)^{\beta} \qquad (\beta \neq 0,\ \beta > -1)$$

ナル如キ積分方程式 (Volterra 型) ヲ考ヘル、コノ両辺ニ $(u-s)^{\alpha}du$ ヲカケテ s カラ x マデ積分スルト

$$\int_s^x (u-s)^{\alpha}du \int_u^x K(x,t)(t-u)^{\beta}dt = \int_s^x (x-u)^{\beta}(u-s)^{\alpha}du.$$

double integral ニ對スル Dirichlet's transformation ヲ利用スルト

$$\int_s^t (t-u)^{\beta}(u-s)^{\alpha}du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-s)^{\alpha+\beta+1}$$

$(u = s+(t-s)\theta$ ニヨリ $u \to \theta$ デ行フ)

トナルカラ結局

$$\int_s^x \mathbb{K}(x,t)(t-s)^{\beta+\alpha+1}dt=(x-s)^{\beta+\alpha+1}$$

ソコデ特= α ヲ $(\alpha>-1)$ シテ

$$\beta+\alpha+1=n \qquad (n:\ non\text{-}negative\ integer)$$

ナル如ク適當=エラムナラバ

$$\int_s^x \mathbb{K}(x,t)(t-s)^{n}dt=(x-s)^{n}.$$

コノ両辺ヲ s =ツイテ $(n+1)$-times-partial differentiation ヲ行ヘバ

$$\mathbb{K}(x,s)=0$$

扨テ次= $\mathbb{K}(x,t)$ ヲ次ノ如ク= define シテミル。

$$\begin{cases}\mathbb{K}(x,t)=\mu(x,t) & for \quad x_1\leqq t\leqq x_2<x\\ \mathbb{K}(x,t)=0 & for \quad 0\leqq t<x_1,\\ \mathbb{K}(x,t)=0 & for \quad x_2<t\end{cases}$$

然ルトキハ上ノ積分方程式 (1) ハ

$$\int_u^x=\int_u^{x_1}+\int_{x_1}^{x_2}+\int_{x_2}^{x}=\int_{x_1}^{x_2}$$

デアルカラ

$$(2)\qquad \int_{x_1}^{x_2}\mu(x,t)(t-u)^{\beta}dt=(x-u)^{\beta} \quad for\ any\ x<u$$

トナル。

ソコデ冒頭ノ問題 (A) =立チ戻ッテミルト丁度 (2) =於テ

$$M(x,t)\equiv\frac{x^k}{t^k}\lambda(x,t)\qquad(0<x_1\leq t\leq x_2)$$

ニ相當スル。 但シ $\beta=k-1$; $\beta>-1$ デアルカラ $k>0$.

残ルトコロハ $\beta=0$ ∴ e.g. $k=1$. (trivial)

$\varphi(x,u)=\dfrac{1}{x\Gamma(k)}\left(\log\dfrac{x}{u}\right)^{k-1}$ トシテモ同様結論サレル.

ソレハ $\log x$ ハ単調増加デアルカラ、ヤハリ上述ノ処作ガ可能トナル(全. 紙. 數. 談. 會第10号32、Abel's integral equation; 京大理學部紀要, Vol. 53, 1935, 同題; ((x)ノ代リニ $\log x$ ヲオク) 何レニシテモ $k=1$ トナルトキ以外ハ等式関係が成立セナイコトニナルト思フ。