OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	三角級數ノ和ノ積分可能性ニ関スル一注意
Author(s)	高橋, 龍夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 41, p. 3-7
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74054
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

132. 三角級數ノ和ノ積分可能性ニ関スル一注意

高橋龍夫 (東北大)

一ツノ三角級數

$$(1)\quad \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

ガ一ツノ區間 (a,b) デ一ツノ函數 $S(x)$ ニ收斂シテモソノ

函数が積分可能デアルカ否カハ分ラナイ。実際 $S(x)$ が non-negative デアッテモ積分可能ニハナラナイ。ソレデコノ外ニ如何ナル條件ガアレバ $S(x)$ が積分可能ニナルカトイフコトが問題ニナル。之レニ付イテハ Steinhaus, Zygmund, Verblunsky ノ研究がアル。

最近ノ三角級数ノ單一性ノ理論デハ (1) ノ Poisson sum ノ性質（積分可能性）カラ單一性ヲ論ジテヰル、ソレデ上ニ述ベタト同ジニ Poisson sum ノ積分可能性が問題ニナル、之レニ就イテ Verblunsky ノ定理がアル。

定理. モシ (1) ノ lower Poisson sum $\underline{P}(x)$ が

(2) $\underline{P}(x) \geqq 0 \quad (a<x<b)$

ヲ満足シ

(3) $a_n = O(1), \quad b_n = O(1),$

且ツ、$x=a, x=b$ デ

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n \cos nx - a_n \sin nx}{n}$

が収斂スレバ、$\underline{P}(x)$ ハ (a,b) デ Lebesgue ノ意味デ可積分デアル。

コンデハ條件 (2) ヲモットー般ニシヤウ。即チ

定理. (1) ノ upper Poisson sum 及ビ lower Poisson sum ヲ夫々 $\overline{P}(x), \underline{P}(x)$ トスル. 今

$$\underline{P}(x) > -\infty, \quad \overline{P}(x) \geqq 0$$

トシ、(3) が満足サレ、更ニ (4) が $x=a, x=b$ デ収斂ス

レバ、$\overline{P}(x)$, $\underline{P}(x)$ ハ共ニ (a,b) デ可積分デアル。

証明。 (3)カラ

$$F(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}$$

ハ連続函数デアル。 假定カラ $\underline{P}(x)>-\infty$ デアルカラ、(a,b) 内ニ一ツノ non-dence closed set F_1 ガアッテ、ソノ contiguous interval δ ヲトルト、ソノ interior interval d デ $\underline{P}(x)>K$ ナル常数 $K=K(d)$ ガアル。今 $\Phi(x)=F(x)-K\frac{x^2}{2}$ トオクト、$\Phi(x)$ ハ明カニ d デ連続デアル、ソシテ Rajchman-Zygmund ノ定理カラ

$$\overline{D}^2\Phi(x)=\overline{D}^2F(x)-K\geqq\underline{P}(x)-K>0.$$

コヽニ $\overline{D}^2f(x)$ ハ $f(x)$ ノ upper generalized 2nd derivative デアル。Steinhaus ニヨルト、一般ニ一ツノ closed interval $(a,b]$ デ連続ナ函数 $F(x)$ ガ $a<x<b$ ノスベテノ x ニ付イテ $\overline{D}^2F(x)\geqq0$ ナラバ、$F'(x)$ ガ (a,b) ノ殆ンドスベテノ点デ存在スル。故ニ $\Phi'(x)$ ガ殆ンドスベテノ点デ存在スル。從ッテ $D^2\Phi(x)$ (generalized 2nd derivative) ガ殆ンドスベテノ点デ存在スル。即チ $D^2F(x)$ ガ殆ドスベテノ点デ存在スル。故ニ δ ノ殆ドスベテノ点デ $D^2F(x)$ ガ存在スル。

次ニ F_1 ノ perfect kernel ヲ Π_1 トスルト、F_1 ハ enumerable set ト Π_1 ノ和デアル。$-\underline{P}(x)>-\infty$ デアルカラ Π_1 ニ関シテ non-dence デ closed ナ Π_1 ニ含

マレル集合 F_2 がアッテ、更ニ F_2 = contiguous ナ interval δ_1 ノ interior interval d ヲトルト常数 $K_1 = K_1(d_1)$ がアッテ $x \subset \Pi, d_1$ ノトキ $\underline{P}(x) \geqq K_1$. 故ニ d_1 デ前ト同ジ論理ヲ用ヒルト $D^2F(x)$ が δ ノ殆ンドスベテノ点デ $D^2F(x)$ が存在スルコトガ分ル、コノ論法ヲ繰返シ transfinite induction ヲ用ヒテ、(a,b) ノ殆ドスベテノ点デ $D^2F(x)$ が存在スルコトヲ知ル。

サテ Fatou ノ定理カラ、$D^2F(x)$ ノ存在スル点デハ

(5) $D^2F(x) = \overline{P}(x) = \underline{P}(x)$.

$\overline{P}(x) \geqq 0$ デアルカラ殆ンドスベテノ点デ $D^2F(x) \geqq 0$. 且ツ $P(x) > -\infty$ デアルカラ $\overline{D}^2F(x) > -\infty$ ガ至ルトコロ成リ立ツ（何トナレバ、$\overline{D}^2F(x) \geqq \underline{P}(x)$ ナル故）. $\overline{D}^2F(x) \geqq 0$ ナル如キ点デ $\phi(x) = 0$ トシ $\overline{D}^2F(x) < 0$ ナル如キ点デハ $\phi(x) = \overline{D}^2F(x)$ トオクト、$\phi(x)$ ハ零= equivalent ナ函数、従ッテ勿論可積分デ且ツ至ル所有限デアル。

ソシテ

(6) $\overline{D}^2F(x) \geqq \phi(x)$

デアル。

之レカラハ Verblunsky ノ論文（gournal London Math. Soc. 6 (1931) p.p. 109—110）ト同様デアル。但シ Lemma 1 ヲ用フトコロヲ Lemma 2 ヲ用ヒル。結局 $D^2F(x)$ が (a,b) デ可積分＝ナル。(5) カラ $\overline{P}(x)$, $\underline{P}(x)$ ガ

可積分＝ナル。

上ノ定理＝於テ (2) ハ更＝

$$\underline{P}(x) > -\infty,\ \overline{P}(x) \geqq \psi(x) \quad (\psi(x) \text{ ハ可積分函数})$$

デオキカヘラレル。