



Title	三角級數ノ和ノ積分可能性ニ関スルー注意
Author(s)	高橋, 龍夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 41, p. 3-7
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74054">https://doi.org/10.18910/74054</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 132. 三角級数ノ和ノ積分可能性ニ関スルニ注意

高橋龍夫(東北大)

一ツノ三角級数

$$(1) \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ガ一ツノ區間  $(a, b)$  ニ一ツノ函数  $S(x)$  = 收斂シテモソノ

函数が積分可能であるか否かハ分らない。実際  $S(x)$  が *non-negative* デアツテモ積分可能ハ分らない。ソレデコノ外ニ如何ナル條件ガアレバ  $S(x)$  が積分可能ナルカトイフコトガ問題ナル。之レニ付イテハ *steinhaus*, *Zygmund*, *Verblunsky* ノ研究ガアル。

最近ノ三角級数ノ単一性ノ理論デハ (1) *Poisson sum* ノ性質 (積分可能性) カラ単一性ヲ論ジテキル。ソレヲ上ニ述バタト同ジニ *Poisson sum* ノ積分可能性ガ問題ナル。之レニ就イテ *Verblunsky* ノ定理ガアル。

定理. モシ (1) *lower Poisson sum*  $\underline{P}(x)$  ガ

$$(2) \quad \underline{P}(x) \geq 0 \quad (a < x < b)$$

ヲ満足シ

$$(3) \quad a_n = o(1), \quad b_n = o(1),$$

且ツ、 $x = a, x = b$  非

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \cos nx - a_n \sin nx}{n}$$

ガ収斂スレバ、 $\underline{P}(x)$  ハ  $(a, b)$  デ *Lebesgue* ノ意味デ可積分デアアル。

コソデハ條件 (2) ヲモット一般ニシヤウ。即チ

定理. (1) *upper Poisson sum* 及ビ *lower Poisson sum* ヲ大々  $\overline{P}(x), \underline{P}(x)$  トスル。今

$$\underline{P}(x) > -\infty, \quad \overline{P}(x) \geq 0$$

トシ、(3) ガ満足サレ、更ニ (4) ガ  $x = a, x = b$  デ収斂ス

レバ、 $\overline{P}(x)$ ,  $\underline{P}(x)$  ハ共 =  $(a, b)$  デ可積分デアル。

証明. (3)カラ

$$F(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$$

ハ連続函数デアル。 假定カラ  $\underline{P}(x) > -\infty$  デアルカラ、 $(a, b)$

内 = ヲツ、non-dence closed set  $F_1$  ガアツテ、ソノ

contiguous interval  $S$  ヲトルト、ソノ interior

interval  $d$  デ  $\underline{P}(x) > K$  ナル常数  $K = K(d)$  ガアル。

今  $\Phi(x) = F(x) - K \frac{x^2}{2}$  トオクト、 $\Phi(x)$  ハ明カ =  $d$  デ連続

デアル、ソシテ Rajchman-Zygmund ノ定理カラ

$$\overline{D}^2 \Phi(x) = \overline{D}^2 F(x) - K \geq \underline{P}(x) - K > 0.$$

コノ  $\overline{D}^2 f(x)$  ハ  $f(x)$  ノ upper generalized 2nd derivative デアル。 Steinhaus = ヨルト、一般 =

ユツ、closed interval  $(a, b)$  デ連続ナ函数  $F(x)$

ガ  $a < x < b$  ノスベテノ  $x$  = 付イテ  $\overline{D}^2 F(x) \geq 0$  ナラバ、

$F''(x)$  ガ  $(a, b)$  ノ殆ンドスベテノ点デ存在スル。故ニ  $\Phi''(x)$

ガ殆ンドスベテノ点デ存在スル。従ツテ  $D^2 \Phi(x)$  (general-

ized 2nd derivative) ガ殆ンドスベテノ点デ存在ス

ル。即チ  $D^2 F(x)$  ガ殆ンドスベテノ点デ存在スル。故ニ  $\delta$  ノ殆

ンドスベテノ点デ  $D^2 F(x)$  ガ存在スル。

\* =  $F_1$  ノ perfect kernel ヲ  $\Pi_1$  トスルト、 $F_1$  ハ enumerable set ト  $\Pi_1$  ノ和デアル、 $-\underline{P}(x) > -\infty$  デアルカラ  $\Pi_1$  = 関シテ non-dence デ closed +  $\Pi_1$  = 含

マレル集合  $F_2$  がアツテ、更 =  $F_2 = \text{contiguous} + \text{interval } \delta_i$ , interior interval  $d$  ヲトルト常数  $K_1 = K_1(d_1)$  がアツテ  $x \in \Pi, d_1$  ノトキ  $\underline{P}(x) \geq K_1$ . 故 =  $d_1$  デ前ト同ジ論理ヲ用ヒルト  $D^2 F(x)$  が  $\delta$  ノ殆ンドスベテノ点デ  $D^2 F(x)$  が存在スルコトガナル. コノ論法ヲ繰返シ *transfinite induction* ヲ用ヒテ、 $(a, b)$  ノ殆ンドスベテノ点デ  $D^2 F(x)$  が存在スルコトヲ知ル。

サテ *Fatou* ノ定理カラ、 $D^2 F(x)$  ノ存在スル点デハ

$$(5) \quad D^2 F(x) = \overline{P}(x) = \underline{P}(x).$$

$\overline{P}(x) \geq 0$  デアルカラ殆ンドスベテノ点デ  $D^2 F(x) \geq 0$ . 且ツ  $\underline{P}(x) > -\infty$  デアルカラ  $\overline{D^2 F(x)} > -\infty$  ガ至ルトコト成リ立ツ (何トナレバ、 $\overline{D^2 F(x)} \geq \underline{P}(x) + \epsilon$  ナル故).  $\overline{D^2 F(x)} \geq 0$  ナル如キ点デ  $\phi(x) = 0$  トシ  $\overline{D^2 F(x)} < 0$  ナル如キ点デハ  $\phi(x) = \overline{D^2 F(x)}$  トオクト、 $\phi(x)$  ノ零 = *equivalent* + 函数、從ツテ 勿論可積分デ且ツ至ル所有限デアル。

ソシテ

$$(6) \quad \overline{D^2 F(x)} \geq \phi(x)$$

デアル。

之レカラハ *Verblunsky* ノ論文 (*Journal London Math. Soc.* 6 (1931) p. p. 109-110) ト同様デアル。但シ *Lemma 1* ヲ用フトコロヲ *Lemma 2* ヲ用ヒル。結局  $D^2 F(x)$  が  $(a, b)$  デ可積分 = ナル。(5) カラ  $\overline{P}(x)$ ,  $\underline{P}(x)$  が

可積分 = ナル。

上ノ定理ニ於テ (2) ハ更ニ

$$\underline{P}(x) > -\infty, \overline{P}(x) \geq \psi(x) \quad (\psi(x) \text{ハ可積分函数})$$

ヲオキカヘラレル。