



Title	im Kleinen affine 寫像二就テ II
Author(s)	吉田, 耕作; 角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 41, p. 10-18
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74058
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

136. *im Kleinen affine* 寫像 = 就テ II.

吉田耕作, 角谷静夫 (阪大)

前論 128ヲ精シクシテミタイ。

定義 1. x, y 平面ノ開領域 = 於テ定義サレタ一組ノ一價連続函数 $u(x, y), v(x, y)$ が次ノ條件ヲ満足スルトキ = 寫像 $(x, y) \rightarrow (X, Y), X = u(x, y), Y = v(x, y)$ ヲ *im Kleinen affine* デアルト呼ブ。

(i) $D =$ 於テ u_x, u_y, v_x, v_y が連続

$$(ii) \quad J(x, y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \geq 0.$$

但シ $u \equiv \text{const}, v \equiv \text{const}$

ノ場合ヲ除キ J ノ零点ハ D 内ニ集積シナイ。(≥ 0 ヲ ≤ 0 デ置キカヘテモヨイガ以下 ≥ 0 ノミヲ考ヘル)

(iii) $J \neq 0$ なる点ノ近傍デハ上ノ寫像、*schlicht* デアルガ $J(x_0, y_0) = 0$ トスルト (x_0, y_0) ヲ中心トスル充分小サナ円ハ $(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)) =$ 於テ *algebraic* = 分岐シタ *Riemannsche Flächenstück* = *schlicht* = 寫サレル。

條件 (iii) ハ (i), (ii) カラ多分導カレルト思ヒマスガ今ノ所ハ簡單ノタメニ (iii) ヲモ假定シテオキマス。

定理 I.

$$(1) \quad \rho(x, y) = \frac{u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2}{J(x, y)}$$

= ヨツテ定義サレル $\rho(x, y)$ ハ $J \neq 0$ ナル点デハ連続ニシテ且ツ ≥ 2 デアル。 $J(x, y) \neq 0$ ナル点ニテハ

$$(2) \quad u_x^2 + v_x^2 \leq \rho(x, y) J(x, y)$$

ココニ ρ ハ $\rho + \frac{1}{\rho} = \rho$, $\rho \geq 1$ ニテ定義サレル函数デ $J \neq 0$ ナル点デハ連続デアル。尚 (2) = 於テ等号ノ成立スル

ノハ $u_y^2 + v_y^2 = \frac{1}{\rho} J(x, y)$ ナルトキニ限ル。

証明. $E = u_x^2 + v_x^2$, $F = u_x u_y + v_x v_y$,

$$G = u_y^2 + v_y^2$$

トオケバ (1) ハ

$$(3) \quad \frac{E+G}{\sqrt{EG-F^2}} = \rho = \rho + \frac{1}{\rho}$$

ト書ケルカラ $\rho \geq 2$ 。 (ii) = ヨリ $J \neq 0$ ナル点デハ、

$E \neq 0$, $G \neq 0$ カカラ

$$g + \frac{1}{g} \geq \frac{\frac{E}{G} + 1}{\sqrt{\frac{E}{G}}} = \sqrt{\frac{E}{G}} + \sqrt{\frac{G}{E}}.$$

$$\text{即ち } g^2 \geq \frac{E}{G}, \frac{G}{E}.$$

之レヲ (3) = 代入シテ

$$g + \frac{1}{g} \geq \frac{E + \frac{E}{g^2}}{J} = \frac{E}{J} \left(1 + \frac{1}{g^2}\right).$$

$$\text{故に } g \geq \frac{E}{J}, \quad \text{同ジク } g \geq \frac{G}{J}.$$

$$(3) \text{ヨリ. } \frac{E}{J} = g \quad \text{ノトキハ} \quad \frac{G}{J} = \frac{1}{g}.$$

定義 2. 上ノ如キ u, v = ヨツテ定メラレル複素函数

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y), \quad z = x + i y$$

ヲ D = 於テ *pseudo-regular* デアルト呼バ (*Laurentieff*, *presque analytique* ト結局同ジデアリマセウ)。一般ニ複素函数 $f(z)$ が $z = z_0$ ヲ中心トスル充分小サノ円ノ中デ *pseudo-regular* ナラバ $f(z)$ ハ z_0 = 於イテ *p. r.* ナリト云フ。同様ニシテ *pseudo-meromorphic* モ定義デキル。

定理 2. $f(z)$ が D = 於テ *p. r.* ナラバ $f(z)$ ノ入方向ノ微分 $f_\lambda(z)$ ハ

$$(4) \quad |f_\lambda(z)|^2 \leq g(x, y) J(x, y)$$

ヲ満足スル。但シ等号が成立スルノハ λ = 直角 + μ 方向

、微分が $|f'_x(z)|^2 = \frac{J(x,y)}{g(x,y)}$ ヲ満足スルトキ = 限ル。

証明. 定理1ヨリ明カ =

即ち $f(z) = \text{ヨリ im Kleinen} = \text{ハ円が楕円} = \text{寫サレソ}$
 、長軸、短軸ノ長サノ比が $g(x,y) = \text{ヨリ與ヘラレルノ}$
 デアル。

定理3. $w = f(z)$ ヲ $p. h.$, $F(w)$ ヲ *regular* ト
 スレバ $G(z) = F(f(z))$ ハ矢張り $p. h.$ デ且 $f(z)$ ト $G(z)$
 トハ $g(x,y)$ ヲ同ジクスル。

証明. 明カ.

定理4. (Generalisation of Grötzsch's theorem)

一辺ノ長サ y , 他辺ノ長サ dx + ル infinitesimal
 = 細長イ矩形 R , 内部及ビ周上ヲコメテ $p. h.$ + $f(z) = \text{ヨ}$
 リ R ガ $\text{area } dA$ + $\text{ル領域} = \text{寫サレタトスルト}$

$$(5) \quad \frac{dA}{dx} \geq \frac{L^2}{gy}$$

但シ $g = \max_{in R} g(x,y)$, $L = \int_y |f'_y(z)| dy$. ココ = 等

号ノ成立スルノハ $R = \text{於テ } |f'_y(z)|^2 \equiv \text{const} = gJ(x,y)$,
 $J(x,y) \equiv \text{const}$ ノトキ = 限ル。

証明. $L = \int_y |f'_y(z)| dy$ ヲ *Schwarz* ノ不等式及

ビ (4) ヲ用ヒテ

$$L^2 \leq y \int_y |f_y(z)|^2 dy \leq y q \int_y J(x, y) dy = y q \frac{dA}{dx}.$$

等号ノ成立スル場合ノ議論ハ明カデス。

(5)ヲ用ヒテ Ahlfors, 等角寫像論的豫備定理ガ拡張
サレマスガ次, 機会ニ讓ツテ (5)ノ應用例ヲニツ述ベテヲ
キマス。コノ中定理 6 ハ Laurentieff, 論文ニ証明ナ
シテ述ベラレテアルモノデス。

定理 5. (Generalisation of Koebe's "Vier-
telsatz")

單位円 $|z| < 1$ ニ於テ pseudo-regular ナ
 $f(z)$ ガ

$$\alpha) f(0) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \geq 1$$

$$\beta) |z| < 1 \text{ニ於テ schlicht}$$

ヲ満足スルナラバ, $w = f(z)$ ニヨル $|z| < 1$ ノ Bild, 中
ニハ円

$$(6) |w| < \frac{\lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{r_0}{4}}{e^{\int_{r_0}^1 \frac{dr}{r q(r)}}} = d$$

ガ含マレル。但シ $q(r) = \max_{|z|=r} q(x, y)$

証明. $w = f(z)$ ニヨル $|z| < 1$ ノ Bild, Randヲ
Sトスル。W平面ノ原点ヲ通ル直線 (正實軸トナス角 θ)
ガ始メテ Sニ交ハルマデノ長サヲ $d_1(\theta)$ トスル。 $\min_{\theta} d_1(\theta)$

$=d_1$, トシ且ツコノ d_1 ハ $\theta=0$ ノトキ attain サレル
モノト假定スル。 $d_1 \geq d$ ナルコトヲ証明スレバヨイ。

楮テ d_1 カラ 正實軸ニ沿フテ cut ノ入ツタ w 平面ヲ
バ $w = \frac{-4d_1 z_1}{(1-z_1)^2}$ ノ逆函数ノ一ツノ分枝 $z_1 = F(w) = \text{ヨ}$

ツテ單位円 $|z_1| < 1$ ニ寫スコトガデキル。ヨツテ必要アラバ
適當ニ Schlicht ヲ入レテ幾ツカノ domain ニ分割サレタ
 $|z| < 1$ ヲ $F(f(z)) = \text{ヨツテ schlicht} = |z_1| < 1$ ノ内部
ニ寫スコトガ出來ル。 Schlicht ハ $z=0$ ノ近傍ニハナク
且ツ又

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{F(f(z))}{z} \right| = |F'(0)| \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \geq \frac{1}{4d_1}$$

デアル。

今 $|z| < 1$ ヲ $\log = \text{ヨツテ Band } B: (z=re^{i\theta}) \log r < 0,$
 $|\theta| < \pi$ ニ寫ス。 $\log$ ノ一ツノ分枝ヲトレバ Schlicht ヲ入
ツタ B ハ $\log F(f(z)) = \text{ヨツテ Band } B_1: (\log F(f(z))$
 $= \log r_1 + i\theta_1), \log r_1 < 0, \text{ Variation } \theta = 2\pi \text{ ノ一}$
 $\log r_1$

部分ニ Schlicht = im Kleinen affine = 寫サレル。

此ノ寫像 = (5) ヲ應用スレバ (g ハ定理 3 = ヨリ 度ヲナイ)

$$2\pi \left(\log \frac{1}{\frac{r_0}{4d_1} - \varepsilon} \right) \geq \int_{\log r_0}^0 \frac{(2\pi)^2}{2\pi g(r)} d \log r$$

但シ正数 ε ハ $r_0 \rightarrow 0$ ナルトキ $0 =$ 收斂スルモノトスル。
之ヨリ

$$d_1 \geq \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{r_0}{4} e^{\int_{r_0}^1 \frac{dr}{r g(r)}} = d.$$

定理6. (Generalisation of Picard's theorem)

$f(z)$ が $0 < |z| \leq 1$ = 於テ pseud regular トシ
且ツ $z=0$ ハ $f(z)$, essential singular point
トスル。即チ

$$\alpha) \quad \lim_{z_i \rightarrow 0} f(z_i) = a, \quad \lim_{z'_i \rightarrow 0} f(z'_i) = b, \quad a \neq b \text{ ナル}$$

如キ点列 $\{z_i\}, \{z'_i\}$ が存在スル。

然ラバ

$$\beta) \quad \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{r_0}^1 \frac{dr}{r g(r)}, \quad g(r) = \max_{|z|=r} g(x, y)$$

が diverge スルトキハ, $f(z)$ ハ高々レツノ有限値ヲ除イ
テ全テノ有限値ヲ $0 < |z| < 1$ デトル。

証明。 $f(z)$ が $0 < |z| < 1$ = 於テ $0, 1$ ナル値ヲト
ラナイトスル。コノトキ矛盾が云ヘレバヨイ。

$f(z)$ = ヨル $0 < |z| < 1$, Bild デアル点, Riemann
面 R ハ二重連結ダカラ之ヲ regular schlicht =
円環

$$(1) \quad \bar{r}^* < |z_1| < \bar{r}$$

= 寫セル。但シ $|z_1| = \bar{r}^*$ ハ $z=0$, $|z_1| = \bar{r}$ ハ $|z|=1$

$\text{Bild} = \text{ナル様} = \bar{r} = \text{finite}$ ナコトハ、モシ
 $\bar{r} = \infty$ トスルト R ヲ上ノ円環 $(\eta) = \text{寫ス函数 } z_1 = F(z)$
 $\text{逆函数 } z = F^{-1}(z_1)$ ハ $z_1 = \infty$ ヲ *essential singular point*
 $= \text{スルコト} = \text{ナル}$ 。然シ R ハ $0, 1, \infty$ ヲ
 $\text{Rand point} = \text{スルカテ Picardノ定理} = \text{反スル}$ 。
 同様ニシテ $\alpha)$ ヲ用ヒテ $\bar{r}^* > 0$ 。ヨツテ $\bar{r} = \text{finite}$,
 $\bar{r}^* > 0$ 。故ニ $\bar{r} = 1$, $\bar{r}^* > 0$ ト假定シテ差支ヘナイ。

結局正則函数 F ヲ用ヒテ $z_1 = F(f(z))$ ナル *pseud-regular*
 ナ函数が作レテ (定理3ニヨリ $f(z)$ ト g ヲ同
 シクスル) $0 < |z| < 1$ が *schlicht* $= 0 < \bar{r}^* < |z_1| < 1$
 $= \text{寫サレルノデアアル}$ 。

定理5ニ於ケルト同様ニ $\log$ ト(5)ヲ應用スレバ

$$2\pi \log \frac{1}{\bar{r}^*} \geq \int_{\log r_0}^0 \frac{(2\pi)^2 d \log t}{2\pi g(t)}, \quad r_0 > 0$$

左辺ハ有限, 右辺ハ $r_0 \rightarrow 0$ ノトキ $\beta) = \text{ヨリ } \infty$ トナルガ
 ラ矛盾デアアル。

此ノ他種々函数論ノ結果が一般化サレルデアリマセウ。
 例ヘバ *SchwarzノLemma* ヲ擴張スルコトニ際角微係
 數ノ議論ニ出來マセウ。之等ハ順次マトマリ次第ニ本紙上ニ
 述べサセテ頂ク積リデアリマス。定理5, 6ニ於テ

$$\int \frac{d \log r}{g}$$

ノ如キ量ノ入ッテケルノハ注目スベキコトデ, ココニ *Ahlfors*

、初メタ“例、方法”ノ意味ヲ汲取ルコトが出来ヌウカト思ヒマス。

Literature

1. H. Grötzsch: Ber. der Sachs. Acad. Wiss., 80, 1928, p. 503.
2. M. Laurentieff: Sur une classe de representation continues, C. R. N° 12, Tome 200, 1935.
3. L. Ahlfors: Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung usw. Aca Fennicae A, 1, NO. 9, 1930.