



Title	(MA) $A=MA$ ノ一證明ニ就テ
Author(s)	稲垣, 武
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 44, p. 3-8
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74069
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

147. $(\mathcal{M}_A)_A = \mathcal{M}_A$ ノ一証明=就テ

稻垣 武 (北大)

$(\mathcal{M}_A)_A = \mathcal{M}_A$ ノ証明ハ多クノ書ニ掲ゲテアルガ、コノ証明ノ途中デ二重系列ト単一系列トノ對應ヲ付ケナケレバナライ。 (例ヘバ *H. Hahn. Reelle Funktionen I. p. 342* 参照)。二重系列ト単一系列トノ對應=ハ一般= *diagonales Schema* ト *dyadisches Schema* ト=ヨル方法ガ用ヒラレテキルガ前者ノ方ガヨク知ラレテキル様ニ思ヘル。

解析集合論デハ何レカト云ヘバ *realistisch* + 証明ヲ要求スルガ、コノデ *diagonales Schema* =ヨル方法ヲ用ヒ、ソノ一証明ヲ考ヘテ見タ。

Lemma 1. K ヲ任意ノ自然數トスルトキ

$$K = [\ell, m]$$

$$\text{但シ } [\ell, m] = \frac{(\ell+m-1)(\ell+m-2)}{2} + \ell$$

ℓ, m ハ 共 = 自然數.

ナル ℓ, m ガ 一意 = 定マル。

$$\text{証明; } K \geq \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

ヲ 満足スル 正, 整數ノ 最大ナル 解 x ヲ 求メル。

コノ x = 對シテ

$$\text{i) } K = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \quad \text{ナルトキハ}$$

$$\ell = x-2, \quad m = 1$$

$$\text{ii) } K > \frac{(x-1)(x-2)}{2} \quad \text{ナルトキハ}$$

$$\ell = K - \frac{(x-1)(x-2)}{2}, \quad m = x - \ell$$

ト 定メル. スク スレバ K ト $[\ell, m]$ トノ 間 = ハ 一 對
一ノ 對應ガ 付ク. $Q. E. D.$

Lemma 2. 二重系列

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{smallmatrix} n_1 \\ a_{11} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} n_1 \\ a_{11} a_{12} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} n_1 \\ a_{11} a_{12} a_{13} \end{smallmatrix} \right) \cdots \\ \left(\begin{smallmatrix} n_2 \\ a_{21} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} n_2 \\ a_{21} a_{22} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} n_2 \\ a_{21} a_{22} a_{23} \end{smallmatrix} \right) \cdots \\ \left(\begin{smallmatrix} n_3 \\ a_{31} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} n_3 \\ a_{31} a_{32} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} n_3 \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{smallmatrix} \right) \cdots \\ \cdots \end{array} \right.$$

ト 單一系列 $\pi = (p_1 p_2 \cdots p_k \cdots)$

トノ間ニハ次ノ如キ關係デ一對一ノ對應ガ付ク。

(A) ヨリ $\pi = (p_1 p_2 \dots p_k \dots)$ ヲ得ルニハ

$K = [p, q]$ トオケル

$$p_k = a_{p,q} \quad \text{但シ } q \neq 1.$$

$$p_k = [n_p, a_{p,q}] \quad \text{但シ } q = 1.$$

$\pi = (p_1 p_2 \dots p_k \dots)$ ヨリ (A) ヲ得ルニハ

$$[p, q] = K \quad \text{ナル } p, q = \text{對シテ}$$

$$a_{p,q} = p_k \quad \text{但シ } q \neq 1$$

$$\left. \begin{array}{l} n_p = p \\ a_{p,q} = 1 \end{array} \right\} \quad \text{但シ } q = 1$$

証明; (A) ナル二重系列ハ明カニ次ノ二重系列ト一對一ノ對應ガツク。

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{smallmatrix} n_1 \\ a_{11} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ a_{12} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ a_{13} \end{smallmatrix} \right) \dots \\ \left(\begin{smallmatrix} n_2 \\ a_{21} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ a_{22} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ a_{23} \end{smallmatrix} \right) \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

次ニ二重系列

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \dots \\ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \dots \\ \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

ヲ考ヘル。 (C) ヲ對角線的方法ヲ番号ヲ附シ並ベル。 (B) モ

亦對角線的方法ヲ番号ヲ附シ並べル。 $K=[p, 1]$ 番目ノミ
 が $(a_{p,1}^{n_p})$ トナリ、他ハ $(a_{p,q}^0)$ ナル形トナル。 $(a_{p,1}^{n_p})$ ノ
 項ヲ (C) ヨリ求メ、ソノ配列ノ番号ヲ p_K トスル。 $(a_{p,q}^0)$
 = 對シテハ $p_K = a_{p,q}$ トオク。
 オクシテ系列 (B) ヨリ單一系列 $\pi = (p_1, p_2, \dots, p_K) \dots$ ヲ
 得ル。

即チ $K=[p, q]$ トオケバ

$$q \neq 1 \quad \text{ナラバ} \quad p_K = a_{p,q}$$

$$q = 1 \quad \text{ナラバ} \quad p_K = [n_p, a_{p,1}]$$

逆ニ $\pi = (p_1, p_2, \dots, p_K, \dots)$ ヨリ (B) ヲ得ルニハ

Lemma 1. ヨリ $K=[p, q]$ ナル p, q ヲ求メル、然シテ

$$q \neq 1 \quad \text{ナラバ} \quad a_{p,q} = p_K$$

$$q = 1 \quad \text{ナラバ} \quad \begin{cases} n_p = p \\ a_{p,1} = 1 \end{cases}$$

トオケバヨイ。從ツテ二重系列 (A) ト單一系列 $\pi = (p_1, p_2, \dots, p_K, \dots)$

トハ一對一ノ對應が付ク。 Q. E. D.

定理 1. $(\mathcal{M}_A)_A = \mathcal{M}_A$

証明: $\mathcal{M}_A \subseteq (\mathcal{M}_A)_A$ ハ明カナル故

$\mathcal{M}_A \supseteq (\mathcal{M}_A)_A$ ヲ示セバ充分ナル。

$E \in (\mathcal{M}_A)_A$ トオクト

$$(1) \quad E = \sum_{\nu} \prod_{K=1}^{\infty} N_{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_K}$$

$$\square \square = N_{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_K} \in \mathcal{M}_A$$

$$(2) \quad \therefore N_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \sum_{\alpha} \prod_{k'=1}^{\infty} M_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k'}}^{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

$$\text{ココ} = M_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k'}}^{n_1, n_2, \dots, n_k} \in \mathcal{M}.$$

$$\therefore E = \sum_{\nu} N_{n_1} N_{n_1, n_2, \dots} N_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots}$$

$$= \sum_{\nu} \left(\sum_{\alpha_1} M_{\alpha_{11}}^{n_1} \cdot M_{\alpha_{11}, \alpha_{12}}^{n_1} \cdot \dots \right) \left(\sum_{\alpha_2} M_{\alpha_{21}}^{n_1, n_2} \cdot M_{\alpha_{21}, \alpha_{22}}^{n_1, n_2} \cdot \dots \right) \dots$$

$$= \sum_{\nu, \alpha_1, \alpha_2, \dots} M_{\alpha_{11}}^{n_1} M_{\alpha_{11}, \alpha_{12}}^{n_1} M_{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}}^{n_1} \dots$$

$$\dots M_{\alpha_{21}}^{n_1, n_2} \cdot M_{\alpha_{21}, \alpha_{22}}^{n_1, n_2} \cdot M_{\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}}^{n_1, n_2} \dots$$

從ツテ添數ノ二重系列

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} n_1 \\ \alpha_{11} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n_1 \\ \alpha_{11}, \alpha_{12} \end{array} \right) \dots \\ \left(\begin{array}{c} n_2 \\ \alpha_{21} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n_2 \\ \alpha_{21}, \alpha_{22} \end{array} \right) \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

が定マル。Lemma 2 = ヨリ。コノ系列 = ハーツノ系列

$\pi = (p_1, p_2, \dots, p_k, \dots)$ が對應シテ

$$(3) \quad E = \sum_{\pi} M_{p_1} \cdot M_{p_1, p_2} \cdot M_{p_1, p_2, p_3} \cdot \dots \cdot M_{p_1, p_2, \dots, p_k} \dots$$

$$\text{ココ} = M_{p_1, p_2, \dots, p_k} \in \mathcal{M}.$$

$$(4) \quad \therefore E \subseteq \mathcal{M}_A.$$

$$\therefore (\mathcal{M}_A)_A \subseteq \mathcal{M}_A.$$

Q. E. D.

上ノ定理ト全様ノコトハ *ensemble d'unicite* = 就テ
成立スルカラ、ココ = 示シテオカシ。

定理 2. $\cup \cup (\mathcal{M}) = \cup (\mathcal{M}).$

証明: コノ場合モ $\cup (\mathcal{M})$ ノ存在ヲ假定スレバ

$$\mathcal{M} \subseteq \cup (\mathcal{M})$$

ハ明カナル故 $\cup \cup (\mathcal{M}) \subseteq \cup (\mathcal{M})$ ヲ示セバ充分デアル。

$$E \in \cup \cup (\mathcal{M}) \quad \text{トスレバ}$$

定理 1, (1) 式 及ビ (2) 式 デ

$$\prod_{K=1}^{\infty} N_{n_1, n_2, \dots, n_K} \cdot N_{n'_1, n'_2, \dots, n'_K} = 0, \quad (n_1, n_2, \dots, n_K) \neq (n'_1, n'_2, \dots, n'_K)$$

$$\prod_{K=1}^{\infty} M_{l_1, l_2, \dots, l_K}^{n_1, n_2, \dots, n_K} \cdot M_{l'_1, l'_2, \dots, l'_K}^{n_1, n_2, \dots, n_K} = 0,$$

$$(l_1, l_2, \dots, l_K) \neq (l'_1, l'_2, \dots, l'_K)$$

ナル條件が満足サレテキル。從ツテ 定理 1, (3) 式 デ

$$\pi = (p_1, p_2, \dots, p_K) \quad \text{が異ナレバ} \quad \nu = (n_1, n_2, \dots, n_K)$$

が異ナルカラ明カニ 次式が成立スル。

$$\prod_{K=1}^{\infty} M_{p_1, p_2, \dots, p_K} \cdot M_{p'_1, p'_2, \dots, p'_K} = 0,$$

$$(p_1, p_2, \dots, p_K) \neq (p'_1, p'_2, \dots, p'_K)$$

從ツテ (4) 式 トシテハ

$$E \in \cup (\mathcal{M})$$

$$\therefore \cup \cup (\mathcal{M}) \subseteq \cup (\mathcal{M}) \quad \text{Q. E. D.}$$