



Title	Poisson積分ノ小兒的解釋
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 45, p. 4-6
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74074
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

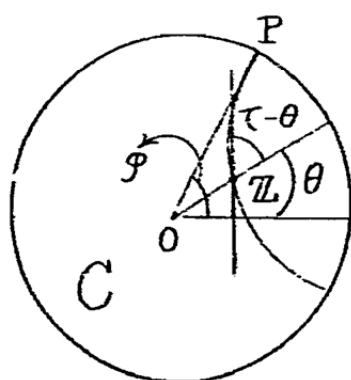
<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

152. Poisson 積分ノ小兒的解釋

南雲 道夫 (阪大)

二次元 (平面) ノ調和函數ニ於ケル Poisson ノ積分
ニ関スルーツノ初等的ナ解釋ヲ一寸思ヒツイタマ、申上ゲマ
ス。アマリ平凡ナ事故、スデニ充分ヨク知ラレテキルコトカ
トモ思ヒマス。



C ヲ單位円, $Z = re^{i\theta}$ ヲ C 内ノ任
意ノ一点, $P = e^{i\varphi}$ ヲ C 周上ノ任
意ノ点トシ, P ニ於テ C ト直交スル
円ガ C 円ノ半径 OZ ト交ハル角ヲ

$T - \theta$ トスレバ, P ノ位置ハ T ニヨ

ツテ決定サレル。ソコデ調和函數 $u(x, y)$ ガ C 周上デ取ル
値ヲ T ノ函數トシテ $U(T)$ デ表ハセバ [$Z = x + iy$ トス]

$$(1) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(T) dT.$$

何トナレバ調和函數ハ等角寫像ニヨツテ不変デアルカ
ラ, 特ニ

$$w = \frac{z - Z}{Z\bar{z} - 1}$$

ナル円ノ對應ニヨツテ Z ヲ円ノ中心ニ移セバ (T ハ不変),
(1)ハ円周上ノ値ノ平均値ガソノ中心ニ於ケル値ニ等シイコト
ヲ示スカラデアル。

所が $z = e^{i\varphi}$, $w = e^{i\tau}$ トスレバ,

$$d\tau = |dw| = \frac{|1 - z\bar{w}|}{|\bar{w}z - 1|^2} |dz|$$

$$= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi.$$

カクシテ次ノ Poisson ノ積分ヲ得ル。

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi$$

上ト類似ノ考ヘ方ヲ3次元ノ調和函数ノ球面ニ関スル積
分公式ニモ應用出來ルダラウト思ヒマス。

扱テ上ノ考ヘデハ調和函数ニ関スル基本的性質トシテ、円
周上ノ平均値ガソノ中心ニ於ケル値ニ等シイコトヲ假定シテ
キマス。次ニ我々ハ(1)ナル形ニ表ハサレル函数ガ調和函数
デアツテソレガ円周ニ與ヘラレタル値 $U(\tau)$ ニ一致スルコト
ヲ示シマセウ。 $u(x, y)$ ガ C 内ニ連続ナ C ノ周上ノ一点ニ
近ヅクトキ、 $u(x, y)$ ガ $U(\tau)$ ニ近ヅクコトハ初等的ニ容
易ニ証明出來マスカラ、只 $u(x, y)$ ガ C 内ニ harmonic
ナコトダケヲ証明シマセウ。ソレニハ $P = e^{i\varphi}$ ヲ一定トスル
時、 τ ガ (x, y) ノ函数トシテ $[Z = x + iy]$ harmonic
ナコトヲ証明スレバヨイ。所が

$$w = \frac{z - \bar{Z}}{\bar{Z}z - 1}$$

デ $z = e^{i\theta}$, $w = e^{i\tau}$ トスレバ

$$i\tau = \log w = \log(e^{i\theta} - \mathbb{Z}) - \log(e^{i\theta}\overline{\mathbb{Z}} - 1).$$

上ノ右辺ハ $f_1(\mathbb{Z}) + f_2(\overline{\mathbb{Z}})$ ナル形ヲ有スル。但シ $f_1(z)$ ハ
 z ノ解析函数デ $\mathbb{C}$ 内デ一價正則デアアル。シカラバ $f_1(\mathbb{Z})$ 及ビ
 $f_2(\overline{\mathbb{Z}})$ ノ各虚数部分ハ調和函数デアアル $\{(x, y) \text{ヲ } (x, -y) =$
 $\text{カヘテモ調和函数デアアル}\}$ が故ニ (x, y) ハ調和函数デアアル。
 (証明了)