



Title	Closureニ関スル一定理
Author(s)	泉, 信一
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 46, p. 7-10
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74080
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

158. Closure = 閉スルー定理

泉 信一 (東北大)

$\{y^n\}$ が任意ノ区間ニ於テ L^2 -closed ナコトハヨク知ラレテアル、之ヲ無限区間ノ場合ニ擴張スルノガ本論文ノ目的デアアル。

1. $\delta(y)$ が $(0, \infty)$ デ定義サレタ正函数デ

$$\delta(y) \geq \frac{A}{1+y^\varepsilon}, \quad y > 0 \quad (1)$$

トナル様ナ $A > 0$ 及ビ $\varepsilon > 0$ が存在スルトシ、且ツ $y \rightarrow \infty$ ノトキ $\delta(y) \downarrow 0$ トスル。

任意ノ有限区間デ二乗カ可積分デ且 $|y| \rightarrow \infty$ ノトキ

$$f(y) = O(e^{-|y|\delta(|y|)}) \quad (2)$$

ヲ満足スル函数 $f(y)$ ノ class ヲ $\mathcal{Y}$ トスル。從ツテ $\mathcal{Y} \subset L^2(-\infty, +\infty)$ 。

$+ (y) \in \mathcal{Y} = \text{對シテ}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^n f(y) dy = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

が成立スルトキ、 $f(y)$ が $null$ (乃チ殆んどスベテノ点ヲ零ニ等シイ) ナラバ、 $\{y^n\}$ ハ $(-\infty, +\infty)$ ニ於テ $\mathcal{F}$ = 閉シテ $closed$ デアルトイフ。

定理. $\{y^n\}$ が $(-\infty, +\infty)$ ニ於テ $\mathcal{F}$ = 閉シテ $closed$ ナルタメノ必要且ツ十分ノ條件ハ

$$\int_0^{\infty} \frac{\delta(y)}{1+y} dy \quad (4)$$

ノ発散スルコトデアル。

之レト同種ノ定理ガ、本年四月ノ年會デ竹中博士ニヨツテノベラレタ、竹中博士ノハ *de la Vallée Poussin* ノ方法ヲ用ヒルノデアル。

コノ定理ハ *Ingham, Journ. London Math. Soc.*, 9 (1934), pp. 29—32 ニ含マレテアル。次ニ *Ingham* ニナラツテ定理ヲ証明シヨウ。

2. 豫備定理. (4) が収斂スルトキ、任意ノ區間 (a, b) ニ對シテ

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{xyi} dy \quad (5)$$

ガ (a, b) ニ於テ $null$ デナク且ツ (a, b) 外デハ恒等的ニ零トナルヤウナ $f(y) \in \mathcal{F}$ が存在スル。

証明ハ *Ingham* ノ前述ノ論文 p. 29, 下カラ二行目ニ始マリ、次頁ノ下カラ八行目ニ終ル。

定理ノ條件ノ必要ナコトヲ示スタメニ、(4) が収斂スル

トスル。然ルトキ豫備定理カラ、(5) が (a, b) ($b > a > 0$)
ノ外デ恒等的ニ零デ、 (a, b) デハ null デナイ。又
 $f(y) \in \mathcal{F}$ が存在スル。従ツテ $f(y)$ ハ null デナイ。
更ニ

$$g^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (iy)^{\nu} f(y) e^{xyi} dy \quad (6)$$

及ビ

$$0 = g^{(\nu)}(0) = \frac{i^{\nu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\nu} f(y) dy \quad (6')$$

故ニ $\{y^n\}$ ハ closed デナイ。故ニ定理ノ條件ハ必要
デアル。

次ニ定理ノ條件ノ十分ナコトヲ示ス。メニ、(3) が成立
シ且ツ (4) が発散スルトスル。更ニ (1) カラ

$$\delta(y) \geq \frac{2}{y^{\varepsilon}}, \quad y > 1$$

トシテモヨイ。然ルトキ $|y| \rightarrow \infty$ ナラバ

$$f(y) = O(e^{-2|y|^{1-\varepsilon}}) \quad (7)$$

(2) 及ビ (6) カラ

$$\begin{aligned} |g^{(\nu)}(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |y|^{\nu} |f(y)| dy \leq K \int_0^{\infty} y^{\nu} e^{-y\delta(y)} dy \\ &= KA_{\nu}, \text{ say.} \end{aligned}$$

コニ K ハ定数デアル。

今 $\alpha > \frac{1}{1-\varepsilon}$, $\nu_1 = \nu^{\alpha}$ トオクトキ、(2) 及ビ (7) カラ

$$\begin{aligned}
A_\nu &= \int_0^{\nu_1} + \int_{\nu_1}^{\infty} y^\nu e^{-y\delta(y)} dy \\
&\leq \nu_1 \int_0^{\nu_1} y^{\nu-1} e^{-y\delta(\nu_1)} dy + e^{-\nu_1^{1-\varepsilon}} \int_{\nu_1}^{\infty} y^\nu e^{-y^{1-\varepsilon}} dy \\
&< \nu_1 \int_0^{\infty} y^{\nu-1} e^{-y\delta(\nu_1)} dy + \frac{e^{-\nu_1^{1-\varepsilon}}}{1-\varepsilon} \int_0^{\infty} y^{\frac{\nu+\varepsilon}{1-\varepsilon}} e^{-y} dy \\
&< \nu_1 \left(\frac{\nu}{\delta(\nu_1)} \right)^\nu + \left(\frac{\nu+\varepsilon}{1-\varepsilon} e^{-(1-\varepsilon)\frac{\nu_1^{1-\varepsilon}}{\nu+\varepsilon}} \right)^{\frac{\nu+\varepsilon}{1-\varepsilon}}
\end{aligned}$$

右辺ノ第一項ハ $\nu \rightarrow \infty$ ノトキ ∞ トナリ、第二項ハ 0 = 近
ヅク、故 =

$$A_\nu \leq \left(\frac{2\nu}{\delta(\nu^\alpha)} \right)^\nu, \quad \nu \geq \nu_0.$$

トナル様ナ ν_0 ガアル。

然ル = (4) ノ発散スルコトカラ

$$\int_1^{\infty} \frac{\delta(u^\alpha)}{u} du$$

ガ発散スル。故 = $\delta(u)$ ノ單調減少ナコトカラ、 $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\delta(\nu^\alpha)}{\nu} \in$

発散シ、從ツテ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[\nu]{A_\nu}} \in$ 亦発散スル。故 = Denjoy,

定理カラ $g(x)$ ハ quasi-analytic デアル。故 = (3)

及ビ (6') カラ $g(x)$ ハ恒等的 = 零デ、從ツテ $f(x)$ ハ null
デアル。