



Title	南雲氏ノ問題ニ就イテ（Ⅱ）
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 46, p. 11-22
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74081
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

159. 南雲氏ノ問題ニ就イテ(Ⅱ)

北川 敏男 (阪大)

$$4. \int_a^b e^{\lambda(x_0+\eta)} \left(\int_0^\eta e^{-\lambda t} f(t) dt \right) d\varphi(\eta) \quad (=J \text{ ト オク}) \text{ ,}$$

分解.

假定〔I,〕ト積分ノ順序交換トカラ

$$\begin{aligned} J &= \int_0^b e^{-\lambda t} f(t) \left(\int_t^b e^{\lambda(x_0+\eta)} g'(\eta) d\eta \right) dt \\ &\quad + \int_a^0 e^{-\lambda t} f(t) \left(\int_t^a e^{\lambda(x_0+\eta)} g'(\eta) d\eta \right) dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda(x_0+t_i)} \int_0^{t_i} f(t) e^{-\lambda t} dt \\ &= \text{I} + \text{II} + \text{III} \quad (\text{ト オク}) \end{aligned}$$

$b > x_0 > 0$ トシテ分解ニトリカスル。

$$\begin{aligned} 1^\circ. \quad \text{I} &= \int_0^b e^{-\lambda t} f(t) \left(\int_t^b e^{\lambda(x_0+\eta)} g'(\eta) d\eta \right) dt \\ &= \text{I}_1 + \text{I}_2 + \text{I}_3 + \text{I}_4 \end{aligned}$$

但シ茲ニ

$$\text{I}_1 = \int_{-x}^{-\delta} e^{-\lambda \tau} f(x_0+\tau) \left(\int_{x_0+\tau}^b e^{\lambda \eta} g'(\eta) d\eta \right) d\tau$$

$$\text{I}_2 = \int_{-\delta}^0 e^{-\lambda \tau} f(x_0+\tau) \left(\int_{x_0+\tau}^b e^{\lambda \eta} g'(\eta) d\eta \right) d\tau$$

$$I_3 = \int_0^{\delta} e^{-\lambda \tau} f(x_0 + \tau) \left(\int_{x_0 + \tau}^b e^{\lambda \eta} g'(\eta) d\eta \right) d\tau$$

$$I_4 = \int_{\delta}^{b-x} e^{-\lambda \tau} f(x_0 + \tau) \left(\int_{x_0 + \tau}^b e^{\lambda \eta} g'(\eta) d\eta \right) d\tau$$

更 = , コレヲ分解スル。

$$(i) \quad I_1 = e^{\lambda x_0} \int_0^{x_0 - \delta} e^{-\lambda t} f(t) \frac{e^{\lambda b} [g'(b)] - e^{\lambda t} [g'(t)]}{\lambda} dt$$

(〔假定 I,〕ト補助定理 2 トヲ使フ)

$$= \frac{[g'(b)] e^{\lambda(x_0 + b)}}{\lambda} \int_0^{x_0 - \delta} e^{-\lambda t} f(t) dt$$

$$- \frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda} \int_0^{x_0 - \delta} f(t) [g'(t)] dt$$

$$(ii) \quad I_2 = \int_{-\delta}^0 e^{-\lambda \tau} f(x_0 + \tau) \left(\int_{x_0 + \tau}^{b - \delta_1} e^{\lambda \eta} g'(\eta) d\eta \right) d\tau$$

$$+ \int_{-\delta}^0 e^{-\lambda \tau} f(x_0 + \tau) d\tau \int_{b - \delta_1}^b e^{\lambda \eta} g'(\eta) d\eta$$

$$= \int_{-\delta}^0 e^{-\lambda \tau} f(x_0 + \tau) \frac{[g'(b - \delta_1)] e^{\lambda(b - \delta_1)} - [g'(x_0 + \tau)] e^{\lambda(x_0 + \tau)}}{\lambda} d\tau$$

$$+ f(x_0 - 0) \int_{-\delta}^0 e^{-\lambda \tau} d\tau \int_{b - \delta_1}^b e^{\lambda \eta} g'(\eta) d\eta$$

$$+ \int_{-\delta}^0 \{f(x_0 + \tau) - f(x_0 - 0)\} e^{-\lambda \tau} d\tau \int_{b - \delta_1}^b e^{\lambda \eta} g'(\eta) d\eta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[g'(b-\delta_1)] e^{\lambda(b-\delta_1)}}{\lambda} \int_{-\delta}^0 e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau) d\tau \\
&\quad - \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} \int_{-\delta}^0 f(x_0+\tau) [g'(x_0+\tau)] d\tau \\
&\quad + f(x_0-0) \frac{-1+e^{\lambda\delta}}{\lambda} \int_{b-\delta_1}^b e^{\lambda\eta} g'(\eta) d\eta \\
&\quad + \int_{-\delta}^0 \{f(x_0+\tau) - f(x_0-0)\} e^{-\lambda\tau} d\tau \int_{b-\delta_1}^b e^{\lambda\eta} g'(\eta) d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad I_3 &= \int_0^\delta e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau) \int_{x_0+\tau}^{b-\delta_2} e^{\lambda\eta} g'(\eta) d\eta d\tau \\
&\quad + \int_0^\delta e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau) d\tau \int_{b-\delta_2}^b e^{\lambda\eta} g'(\eta) d\eta \\
&= \frac{[g'(b-\delta_2)] e^{\lambda(b-\delta_2)}}{\lambda} \int_0^\delta e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau) d\tau \\
&\quad - \frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda} \int_0^\delta f(x_0+\tau) [g'(x_0+\tau)] d\tau \\
&\quad + f(x_0+0) \int_0^\delta e^{-\lambda\tau} d\tau \int_{b-\delta_2}^b e^{\lambda\eta} g'(\eta) d\eta \\
&\quad + \int_0^\delta \{f(x_0+\tau) - f(x_0+0)\} e^{-\lambda\tau} d\tau \int_{b-\delta_2}^b e^{\lambda\eta} g'(\eta) d\eta \\
&= \frac{[g'(b-\delta_2)] e^{\lambda(b-\delta_2)}}{\lambda} \int_0^\delta e^{-\lambda\tau} f(x_0+\tau) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda} \int_0^{\delta} f(x_0 + \tau) [g'(x_0 + \tau)] d\tau \\
& + f(x_0 + 0) \frac{1 - e^{-\lambda \delta}}{\lambda} \int_{b-\delta_2}^b e^{\lambda \eta} g'(\eta) d\eta \\
& + \int_0^{\delta} \{f(x_0 + \tau) - f(x_0 + 0)\} e^{-\lambda \tau} d\tau \int_{b-\delta_2}^b e^{\lambda \eta} g'(\eta) d\eta
\end{aligned}$$

注意: (ii), (iii) = 於イテ、假定 I_1, II_1, II_2 ヲ使用シテ
 IV 。

尚 $0 < \delta < \delta_1, 0 < \delta < \delta_2$ トシテオク。

$$\begin{aligned}
(iv) \quad I_4 &= \int_{\delta}^{b-x_0} e^{-\lambda \tau} f(x_0 + \tau) \left(\int_{x_0 + \tau}^b e^{\lambda \eta} g'(\eta) d\eta \right) d\tau \\
&= \frac{[g'(b) e^{\lambda b}]}{\lambda} \int_{\delta}^{b-x_0} f(x_0 + \tau) e^{-\lambda \tau} d\tau \\
&\quad - \frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda} \int_{\delta}^{b-x_0} f(x_0 + \tau) [g'(x_0 + \tau)] d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2^\circ \quad II &= \int_a^0 e^{-\lambda t} f(t) \left(\int_t^a e^{\lambda(x_0 + \eta)} g'(\eta) d\eta \right) dt \\
&= \frac{[g'(a) e^{\lambda(x_0 + a)}]}{\lambda} \int_a^0 e^{-\lambda t} f(t) dt \\
&\quad - \frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda} \int_a^0 f(t) [g'(t)] dt
\end{aligned}$$

5. 諸テ以上ノ分解ノ結果ニ於イテ

$$1^{\circ} \text{ (i) カラ } \frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda} \int_0^{x_0-\delta} f(t) [g'(t)] dt$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) カラ } & \frac{[g'(b-\delta_1)] e^{\lambda(b-\delta_1)}}{\lambda} \int_{-\delta}^0 e^{-\lambda \tau} f(x_0+\tau) d\tau \\ & - \frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda} \int_{-\delta}^0 f(x_0+\tau) [g'(x_0+\tau)] d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii) カラ } & \frac{[g'(b-\delta_2)] e^{\lambda(b-\delta_2)}}{\lambda} \int_0^{\delta} e^{-\lambda \tau} f(x_0+\tau) d\tau \\ & - \frac{e^{\lambda x_0}}{\lambda} \int_0^{\delta} f(x_0+\tau) [g'(x_0+\tau)] d\tau \end{aligned}$$

(iv) ノ全部

2^o ノ全部

以上ノ各積分値ハ、 δ_i, δ ヲ充分小サクトツテオケバ λ ノ
函数トシテ

$$R\lambda \geq 0 \quad = \text{テハ} \quad \frac{O(e^{\lambda k})}{\lambda} \quad (k < b)$$

$$R\lambda \leq 0 \quad = \text{テハ} \quad \frac{O(e^{\lambda l})}{\lambda} \quad (l > a)$$

ナル如キ k, l ヲ各々ニ對シテ見出し得ル。コノ事ハ豫備
定理1ヲ適用スレバ明カデアル。

依ツテ $\frac{1}{G(\lambda)}$ ヲカケテ $\mathbb{C}_n$ 上デ積分スレバ $n \rightarrow \infty$
ノトキ零トナル。

ソレ故=

$$A. \frac{\sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda(x_0+t_i)} \int_0^{t_i} f(t) e^{-\lambda t} dt}{G(\lambda)} + \frac{[g'(b)] e^{\lambda(x_0+b)} \int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t} f(t) dt}{\lambda G(\lambda)}$$

(III)

I°. (i)

$$B. \frac{1}{G(\lambda)} \int_{-\delta}^0 \{f(x_0+\tau) - f(x_0-0)\} e^{-\lambda \tau} d\tau \int_{b-\delta_1}^b e^{\lambda \eta} g'(\eta) d\eta$$

$$C. \frac{1}{G(\lambda)} \int_0^{\delta} \{f(x_0+\tau) - f(x_0+0)\} e^{-\lambda \tau} d\tau \int_{b-\delta_2}^b e^{\lambda \eta} g'(\eta) d\eta$$

ヲバ、 $\mathbb{C}_n$ 上デ 積分シテ $n \rightarrow \infty$ ノトキ零トナレバ、吾人
ノ定理ノ証明ハ完結スル。以下、§6 デ A, §7 デ B, C
ニツイテ之レヲ示サウ。

$$6. \oint_{\mathbb{C}_n} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda(x_0+t_i)} \int_0^{t_i} f(t) e^{-\lambda t} dt}{G(\lambda)} + \frac{[g'(b)] e^{\lambda(x_0+b)} \int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t} f(t) dt}{\lambda G(\lambda)} \right\} d\lambda$$

$$= \oint_{\mathbb{C}_n} \frac{\sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda(x_0+t_i)} \int_0^{t_i} f(t) e^{-\lambda t} dt}{G(\lambda)} d\lambda$$

$$+ \oint_{\mathbb{C}_n} e^{\lambda x_0} \int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t} f(t) dt d\lambda + \oint_{\mathbb{C}_n} \frac{[g'(a)] e^{\lambda(x_0+a)} \int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t} f(t) dt}{\lambda G(\lambda)} d\lambda$$

$$- \oint_{\mathbb{C}_n} \frac{\sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda(t_i+x_0)} \int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t} f(t) dt}{G(\lambda)} d\lambda$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_{\mathbb{C}_n} \frac{\sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda(t_i+x_0)}}{G(\lambda)} \int_{x-\delta}^{t_i} f(t) e^{-\lambda t} dt d\lambda \\
&\quad + \oint_{\mathbb{C}_n} \frac{[g'(a)] e^{\lambda(x_0+a)}}{\lambda G(\lambda)} \int_0^{x_0-\delta} e^{-\lambda t} f(t) dt d\lambda
\end{aligned}$$

茲 = , $a < 0$ 故カテ $x_0 + a < b$ ナルコト = 注意スレバ,
 豫備定理 3 = 由リ、第二ノ積分ハ $n \rightarrow \infty$ ノトキ零 =
 ナル。

$$\begin{aligned}
&\text{又 } \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda(t_i+x_0)} \int_{x_0-\delta}^{t_i} f(t) e^{-\lambda t} dt \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda(t_i+\delta)}}{\lambda} - \frac{\sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda x_0} f(t_i)}{\lambda} \\
&\quad + \frac{\sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda(t_i+x_0)}}{\lambda} \int_{x_0-\delta}^{t_i} e^{-\lambda t} \left(\int_{x_0-\delta}^t f(\tau) d\tau \right) dt
\end{aligned}$$

ナル故ヲ以ツテ、豫備定理 1, 3 カテ第一積分 $n \rightarrow \infty$ ノ
 トキ零トナル。

7. $f(x)$ ハ点 x_0 ノ近傍デ 即チ $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ ($\varepsilon > \delta > 0$)
 デ負ナラザル單調増加函数ナリトシテ、積分ノ第二ノ平均
 値定理 = 依リ

$$\int_0^\delta \{f(x+\tau) - f(x_0)\} e^{-\lambda \tau} d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\delta \{f(x+\tau) - f(x+0)\} e^{-\mu\tau} \cos \nu\tau d\tau - i \int_0^\delta \{f(x+\tau) - f(x+0)\} e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau d\tau \\
&= \{f(x+\delta-0) - f(x+0)\} \left\{ \int_{\delta'}^\delta e^{-\mu\tau} \cos \nu\tau d\tau - i \int_{\delta''}^\delta e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau d\tau \right\}
\end{aligned}$$

然ルニ

$$\int_{\delta'}^\delta e^{-\mu\tau} \cos \nu\tau d\tau - i \int_{\delta''}^\delta e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau d\tau$$

$$= \begin{cases} O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}\right) & \mu \geq 0 \text{ ノトキ} \\ O\left(\frac{e^{-\mu\delta}}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}\right) & \mu \leq 0 \text{ ノトキ} \end{cases}$$

依ツテ

$$\oint_{C_n} \frac{1}{G(\lambda)} \int_0^\delta \{f(x_0+\tau) - f(x_0+0)\} e^{-\lambda\tau} d\tau d\lambda$$

ハ $|f(x_0+\delta-0) - f(x_0+0)|$ ノ或常数倍ヲ越エズ、從ツテ $\delta \downarrow 0$ ト共ニ、零ニ *tend* スル。

$f(x)$ が点 x_0 ノ近傍デ有界変分ナラバ、負ナラザル單調増加函数ノ差ニ直シテ、同様ノコトが云ヘル。

依ツテ $C =$ ツイテ証明スベキコトが出来タ。

$B =$ ツイテモ全く同様デアル。

8. §4 以下 $b > x_0 > 0$ トシテデアルガ $a < x_0 < 0$ ノトキモ同様デ、コノ場合ニハ、豫備定理4ノ第二ノ積分が役立ツコト、 $x_0 = 0$ ノトキニハ、第一、第二ノ積分が役

立ツコトが容易 = ワカル。

依ッテ §1 ノ定理ノ証明が出来タ。

更ニ進ンデ次ノ如キ結果ヲ得ル。

系: §1 = テ 假定 $[II_1]$, $[II_2]$ = 代フル = 、夫々

[假定 II'_1] 函数 $f(x)$ が區間 $[\xi+a, \xi+b]$ デ *Lebesgue* 積分可能デアル。

[假定 II'_2] 函数が一点 x_0 (但シ $\xi+a < x_0 < \xi+b$) =
テ有界変分デアルヲ以テスレバ

点 x_0 = 對シテ

$$S_n(x_0, \xi) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{1}{G(\lambda)} \left\{ \int_a^b e^{\lambda(x_0+\eta)} \left(\int_{\xi}^{\xi+\eta} e^{-\lambda t} f(t) dt \right) d\varphi(\eta) \right\} d\lambda \\ \rightarrow \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$$

定理 2. 系ノ [假定 II'_2] = 代フル = ,

[假定 II_2^*] $f(x)$ が $(\xi+a, \xi+b)$ = 含まレル區間
 $[\xi+a', \xi+b']$ デ連続有界変分ナリトスル
ヲ以ッテスレバ, $[\xi+a', \xi+b']$ ノ内部 = 含まレル任意
ノ閉區間 $[\xi+a'', \xi+b'']$ = 於ケル x = 關シテ一様 =

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x, \xi) = f(x).$$

証明: コレ = ハ, 次ノ事實 = 着目スレバヨイ。

(i) 豫備定理 3 ノ A_1, B_1 ノ証明ヲ振返ッテミルトキ

A_1^* : $r \geq a' > a$ ナルトキハ, r = 關シテ一様 =

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S^-(n, r) = 0$$

B_7^* : $r \leq b' < b$ ナルトキニハ、 r -関シテ一様ニ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S^+(n, r) = 0$$

トナルコト

(ii) $\xi \eta = \tau$ 、 $f(x+\delta-0) - f(x+0)$ 即チ $f(x+\delta) - f(x)$ が $[a'', b''] = \tau$ -様ニ、 δ ト共ニ零ニ *tend* スルコト。
(コトニハ 假定 II_2' ヲ使フ)

9. 定理 4. 今 $\xi I = \tau$ 假定 I_1, I_2 ノ外ニ更ニ
[假定 II_2''] $f(x)$ ハ任意ノ有限區間デ 連続有界変分デ
アリ

$$[\text{假定 III}] \quad \int_a^b f(x+t) d\varphi(t) = 0 \quad (-\infty < x < +\infty)$$

トスレバ

[主張] 任意ノ有限閉區間 $[p, q]$ ニテ一様ニ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x, 0) = f(x)$$

[証明] $\xi \delta$ ノ定理 2 ヲ見ルトキ、 $S_n(x, \xi) = \tau$ コノ係數ガ $\xi = \text{independent}$ ナ値ヲモツコトガ云ヘサヘスレバヨイ。蓋シ、 $[p, q]$ ニ屬スル任意ノ一点 x_0 ヲトレバ、必ず $\xi + a < x_0 < \xi + b$ ナル如キ ξ ガアル。從ツテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x, \xi) = f(x)$$

が x_0 を含む開区間, 例へば $\left[\xi + \frac{a}{2}, \xi + \frac{b}{2}\right] = \tau$
 一樣に成立スルカラデアル。

サテ $S_n(x, \xi) = \tau \quad x^{p_n-r} e^{\lambda_n x}$, 係数 $a_n, p_{n-r}(\xi)$
 ハ容易に算ル如ク

$$a_n, p_{n-r}(\xi)$$

$$= \frac{p_n!}{(p_n-r)!(r-1)! G^{(p_n)}(\lambda_n)} \int_a^b e^{\lambda_n \eta} \left\{ \int_{\xi}^{\xi+\eta} (\xi+\eta-t)^{r-1} f_1(t) e^{-\lambda_n t} dt \right\} d\eta$$

但シ

$$f_1(t) = f(t) - e^{\lambda_n t} (a_n, p_{n-1}(\xi) t^{p_{n-1}} + \dots + a_n, p_{n-r+1} t^{p_{n-r+1}})$$

ト假 = オク。

$$\left. \begin{aligned} \text{又 } G^{(\Delta)}(\lambda_n) &= 0 & \Delta &= 0, 1, 2, \dots, p_{n-1} \\ G^{(p_n)}(\lambda_n) &\neq 0 \end{aligned} \right\} (!)$$

$$\text{ソレ故} = \frac{da_n, p_{n-r}(\xi)}{d\xi} \quad \text{ノ形が容易にワカリ、}$$

コノデ [假定 III] ト (!) トカラ

$$\frac{da_n, p_{n-r}(\xi)}{d\xi} = 0$$

ナルコトヲ知ル。

10. (附記) 南雲氏ノ問題ニ關聯シテ色々ナ問題ガ
 派生シテ來ル。次号カラ、ソレヲニ關聯シテ筆者ノ得タ二三
 ノ結果ヲ申シ上ゲタイト思ヒマス。

ソレカラ、尚一言。

假定 I_1, I_2 ハ, $G(\lambda)$ ヲバ *exponential sum*
= 直ストコロ = 用キタノデアリマシテ、他ノ假定デアツテモ
 $G(\lambda)$ が *exponential sum* = 直リサヘスレバ、同
様 = 行クワケデアリマス、コノ事ハ何レハツキリ書クコト =
致シタイト思ヒマスガ、ソノ特別ノ場合

$$G(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda t} dt$$

トシテ *Fourier* 級数ヲ含ムノデスカラ。

若シ、筆者ノ得タ結果ガ正シケレバ、*Fourier* 級数
論 = 於ケル古典的ナ *Jordan* ノ収斂條件 = 相當シテ居ル
ワケデス。ソコニ於イテ知ラレテキル幾多ノ収斂條件ガ、ド
ノ程度マデ吾々ノ問題 = アテハマルカ、コレニ関シテハ、諸
賢ノ御教示ニ俟チタイト思ヒマス。ソノタメニ *Fourier*
級数論 = 於ケル *Dirichlet* ノ積分 = *Correspond* シ
タ積分ヲ考ヘテハ如何デセウカ？

—— (續ク) ——