



Title	Speiserノ問題（双曲的ナル為ノ一十分條件）
Author(s)	小林, 善一
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 47, p. 1-5
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74083
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

161. Speiser の問題 (双曲的ナル爲ノ一十分条件)

小林 善一 (東京高師)

茲 = Speiser の問題トハ W —平面上 = 定義サレタ,
與ヘラレタ三点上ニノミ特異点ノアル單一連結無限葉ノ Rie-
mann 面 F ノ型ノ問題デアル。

氏ハ *Über beschränkt automorphe Funktionen*,
Comment. Mathem. Helv. Vol. 4, (1932) = 於テ
Modulfunktion ヲ用ヒテ型ヲ完全ニ分類シテ居ル。

以下同ジク *Modulfunktion* ヲ用ヒテ, *Riemann*
面 F が双曲的デアレタスノ十分条件ヲ述ベテ見タイ。

F ハ $W = b_1, b_2, b_3$ 上ニノミ對數分岐点ガ起ルモノト
シテ, b_1 上ニ正則点ガアレバ. 此ノ葉上デ b_1, b_2, b_3 ヲ通ル
円ヲ引キ, 円弧 b_1, b_2 又ハ b_1, b_3 = 沿ツテ F = 切断ヲ入レル.
然ルトキハ b_2 又ハ b_3 ハ必ズ F ノ境界点デアルカラ, 切断
サレタ F ハ矢張り單一連結デアル。

此ノ様ニシテ b_1, b_2, b_3 上ノスベテノ正則点ヲ通ル円
弧デ F = 切断ヲ入レ, 得タル單一連結ノ *Riemann* 面ヲ
 F トスル. F ハ b_1, b_2, b_3 上ニスベテ對數分岐点ヲ持ツ
modulare Fläche M ノ一部分トナル. 對應スル
Modulfunktion ヲ $m(z) = W$ トシテ之ハ $|z| < 1$ デ
定義サレテ居ルモノトスル. F ハ此ノ函数ノ逆函数 = ヲツテ
 $|z| < 1$ = 横ハル單一連結範圍 Z = 描寫サレル. Z ノ周ハ

$|z|=1$ = 直交スル円弧 及び $|z|=1$ = 属スル点ヨリ成ル。

定理. $|z|=1$ = 属スル Z の境界ノ線測度が正デアレバ F ハ双曲的デアル。

証明. $|z|=1$ = 直交スル円弧 $\widehat{ACB}$ ヲ與ヘル、ソノ中心角ヲ θ トスル。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ト假定スレバ

$$0 < K_1 < \frac{\widehat{ACB}}{\theta} < K_2$$

ナル如キ常數 K_1, K_2 が存在スル。 Z ノ周ハ $|z|=1$ ノ可附番個ノ弧ヲ之レニ直交スル円弧ヲ置キ換ヘタノミデアル故、上記ノ性質カラ長サノ測レル連続曲線デアル。從ツテ Z ヲ $|x| < 1$ = 函數 $x = X(z)$ ヲ等角ニ描寫スレバ $|x|=1$ ト Z ノ周トハ *total stetige* デアル。即チ Z ノ境界ノ $|z|=1$ = 属スル点ハ $|x|=1$ ノ測度正ノ点ニ對應スル、此ノ点集合ヲ (H) トスル。

(H) = 属スル点 = 終ル半徑ノ上デ $|x| \rightarrow 1$ トスレバ、對應スル F ノ曲線ハ殆ンドスベテノ場合 F ノ境界 = 終ルカ、 F ノ *Haarungsbereich* = 向ツテ走ル。

サテ F が拋物的デアレトスレバ F ハ函數 $u = U(w)$ デ $|u| < \infty$ = 等角描寫が出来ル、其ノ際 F ハ u 平面 = 可附番個ノ切断ヲ入レタガケノ單一連結範圍 $\bar{U}$ = 描寫サレル。函數 $U(w), W(z), X(z)$ ヲタドレバ、 $|x| < 1$ ハ $\bar{U}$ = 等角ニ描寫サレテ居ル。此ノ函數ヲ $u = f(x)$ トオケバ、 u

ハ $|x| < 1$ デ正則單葉デアル。④ = 屬スル殆ンドスベテ
ノ半径ノ上デ

$$\lim_{|x| \rightarrow 1} f(x) = \infty$$

が成立スル。 $m(④) > 0$ デアルカラ、容易 = 不合理 = 導ケ
ル。 — (証明了) —

注意 1°. b_i 上 = ハ代數分岐点ヲ許シテモヨイ、円 b_1 ,
 b_2 , b_3 ノ弧ヲ以テ切断シ
入レルトキ b_i 上ノ F ノ内点ガスベテ少クトモ一度ヅツ切断
ノ内点又ハ端点トナルコト、而モ生ズル切断 Riemann 面
 F ハ單一連結トナルヤウニスル。之ハ可能デアル。若シ F が
幾ツカノ離レタ單一連結ノ範圍 = ナツタトシテモ何レカーツ
デ定理ノ假定が成立スレバヨイ。

注意 2°. 上ノ定理ハ次ノ様ナ場合 = ハ点 b ノ個數ヲ n
個 = 擴張出來ル、即チ円 $|z| < 1$ = 内接シ、且ツ辺ガ $|z| = 1$
= 直交スル円弧 n 辺形ヲ円 $|w - w_0| < r$ = 描寫シテ n 辺
形ノ頂点 = 對應スル点ヲ $b_1, b_2, \dots, b_n$ トスルノデ
アル。

注意 3°. 一般ノ Riemann 面デハ次ノ如キ形デ定理
ハ述べラレル。

F ヲ有限個又ハ無限個ノ曲線 = 沿ツテ切断スル。カクテ
生ズル一ツノ單一連結ノ部分 F_1 ヲ考ヘレバ、之レハ双曲線
デアル故、單位円 $|z| < 1$ = 等角 = 描寫スルコトが出來ル。

単位円、半径=對應スル F 上ノ曲線が F ノ境界点又ハ *Hänfungsbereich* = 終ルモノヲ考ヘテ、ソノ端点ノ集合ノ測度ガ正デアレバ F ハ双曲的デアル。Speiser, *Über Riemannsche Flächen*, Satz 3, *Comment. Mathem. Helv.* Vol. 2, (1930) ハ其ノ最も簡單ナ場合ノ一ツデアル。

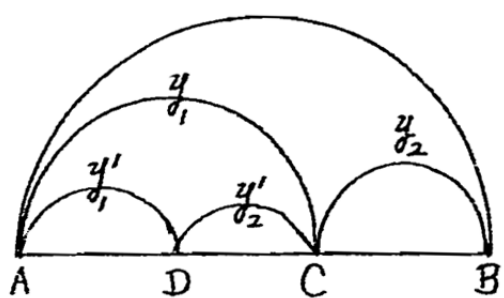
注意 4°. Speiser ノ如ク式テ定理ヲ述ベヤウトスルニハ $|z| < 1$ ノ代リ $= I(z) > 0$ ヲ用ヒル方が簡單デアル。例ヘバ F ノドレカーツノ円弧 b_1, b_2, b_3 ノ中何レカーツ、例ヘバ b_1 ガ正則デアル様ナモノヲトツテ之ヲ $0, \frac{1}{2}, 1$ = 頂点ヲ持ツ円弧三角形ニ描寫スル。

$m(0) = b_1, m(\frac{1}{2}) = b_2, m(1) = b_3$ トスレバ、 F ノ b_1 デノ切断ハ b_2, b_3 = 沿ツテ行フモノトスル。 F ノ描寫 Z ハ $\overline{01}$ ヲ直径トスル半円ニ含マレル。 Z ノ実軸 = 屬スル境界ノ線測度ガ正ナラバ双曲的デアル。サテ Z ハ $\overline{01}$ ヲ直径トスル半円カラ無数ノ小サイ半円ヲ捨テタモノデアル、之等捨テタ半円ノ直径ヲ x_i トスルトキ

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i < 1$$

ナラバ双曲的トナル。 x_i ノ計算ニハ次ノ式ヲ繰返シテ用ヒル。

$$y_1' = \frac{y_1^2 + y_1 y_2}{y_1 + 2y_2}, \quad y_2' = \frac{y_1 y_2}{y_1 + 2y_2},$$



但シ三辺形 ABC ノ $\widehat{AC}$ = 関ス

ル鏡像ヲ三辺形 ADC トシ、 $2\phi_i$ ハ對應スル円ノ直径デアル。