



Title	等角寫像ニ於ケルmet r icalナ一定理
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 47, p. 5-8
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74084
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

152. 等角寫像=於ケル *metrical* ナー定理

吉田耕作 (阪大)

I. 定理 *rectifiable* 且ツ全長、有限ナ *curve* C = ヨツテ 圓マレタ 單一連結ナ 有界領域 D ヲ 單位円 $|z| < 1$ = 等角=寫ス 函數ヲ $w=f(z)$ トスル。然ラバ $|z|=r < 1$ ノ *Bild* ノ 長サ

$$(1) \quad l(r) = \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})| r d\theta$$

ハ r ノ 増加函數 = シテ 且ツ $\lim_{r \rightarrow 1} l(r) = C$ ノ 長サ。

證明. $f'(z) \neq 0$, $|z| < 1$ ナカテ $\sqrt{f'(z)} = F(z)$

ハ $|z| < 1$ ナ 正則。之レヲ

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

トスルト

$$l(r) = \int_0^{2\pi} |F(z)|^2 r d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n+1}$$

依ツテ $l(r)$ ハ r ノ 増加函數。

次 = Carathéodory ノ 定理 = ヨレバ $f(z)$ ハ $|z| \leq 1$ = 於テ 連続 且ツ *schlicht*。尚 $f(e^{i\theta})$ ハ θ ノ 函數トシテ *totalstetig* (*Lusin Privaloff* ノ 定理

Ann. l'école norm. Sup. 1925 p. 156)

依ッテ $f'_\theta(e^{i\theta})$ は integrable. 故 =

$$(2) \quad u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_\varphi(e^{i\varphi}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} d\varphi$$

ナル Poisson 積分ヲ考ヘルト部分積分 = ヲリ

$$\begin{aligned} (3) \quad u(re^{i\theta}) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) \frac{d}{d\varphi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) \frac{d}{d\theta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} d\varphi \\ &= f'_\theta(re^{i\theta}) = \frac{df(re^{i\theta})}{dz} rie^{i\theta}. \end{aligned}$$

(2) 及 ビ (3) ヲリ

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left| \frac{df(re^{i\theta})}{dz} \right| r d\theta &\leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'_\varphi(e^{i\varphi})| \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} |f'_\varphi(e^{i\varphi})| d\varphi \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} d\theta \right\} \\ &= \int_0^{2\pi} |f'_\varphi(e^{i\varphi})| d\varphi = C, \text{ 長サ.} \end{aligned}$$

依ッテ 増加函数, $\lim_{r \rightarrow 1} l(r) \leq C$, 長サ.

一方 $|z|=r < 1$, Bild curve へ $r \rightarrow 1$ ノトキ C
 $= \text{tend}$ スルカラ $\lim_{r \rightarrow 1} l(r) \geq C$, 長サ (曲線ノ長サ
 へ曲線, lower semi-continuous 函数ナリ).

故 =

$$\lim_{r \rightarrow 1} l(r) = C, \text{ 長サ.}$$

C. Q. F. D.

又 Poisson 積分ヲ表ハサレルカラ (2), (3) ヨリ θ ,
高々 measure 0 ノ 集合ヲ除キ

$$\lim_{r \rightarrow 1} f'(re^{i\theta}) e^{i\theta} i = f'_\theta(e^{i\theta})$$

モ同時ニ証サレタコトニナル. (Fatou ノ 定理)

上 定理ハ Fejer ノ 定理 (例ヘバ 吉田先生 等角寫像論
75 頁) = ヨリ $f(z) = \sum b_n z^n$ トスレバ

$$f(e^{i\theta}) = \sum b_n e^{in\theta}$$

ナルー様收斂ヲ Fourier 級数ニ展開サレルコトヲ思ヘバ
Fourier 級数ニ関スル定理トモ考ヘラレルノデ其ノ方面デ
ハ或ハワカリ切ツタコトデアルカモ知レマセンガ, 等角寫像
ノ滑ラカサヲ知ルノニヨイト思ヒマス。

II. *Lusin-Privaloff* ハ (前掲論文) *Fatou*
ノ 定理ヲ使ツテ D が *star region* (C ノ *rectifiable*
假定セヌ) ノ 場合ニ

$$\lim_{r \rightarrow 1} f'(re^{i\theta}) = \text{exist fast iiberall}$$

ヲ示シテヲリマス。之ト上 定理トノ 聯関ハ如何ナモノデセウ
カ。又コノ *Lusin-Privaloff* ノ 定理ヲ使ハバ D が
convex ノ 場合ニハ

$$\lim_{r \rightarrow 1} f''(re^{i\theta}) = \text{exist fast iiberall}$$

が云へマス。ソレハヨク知ラレテル様 = $zf'(z) = F(z)$ が
 $|z| < 1$ ヲ *star region* = 寫スコトヲ使へビヨイノ
 デス。コノ場合 = ハ I, 定理ハ $|z| = r < 1$, Bild が全
 テ *convex* ナコト (例へビ Montel: *Fonction univa-*
lent etc. 13 頁) ヲ注意スレバ初等幾何學的 = タマス
 証明デヤルコトヲ注意シトキマセウ。