OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Picard-Vessiot ノ理論ニ就テ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 51, p. 8-14
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74102
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

180. Picard－Vessiot ノ理論ニ就テ

吉田 耕作（阪大）

Picard (Traité 3) 及ビ Vessiot (École Norm. 3 série, tome 9) ニ依ッテ組立テラレタ所謂線形微分方程式ノ Galois ノ理論ノ essential ナ部分ヲ幾分 modern ニ取扱ッテミタイト思ヒマス。

思ヒ違ヒヲシテル所モ澤山アリマセウシ又文献ニ暗イコトデスカラ御教示ヲ御願ヒスル次第デス。

Def. 1. 領域Dデ定義サレタ有理型函数 $a(x)$ ノ集合Rが次ノ條件ヲ満足スルトキニ之レヲ（Dデ定義サレタ）Körper ト呼ブ。

i) $a \in R$ ナラ $a' \in R$ （a' ハ a ノ微係数）

ii) $a, b \in R$ ナラ $a \pm b,\ ab,\ \frac{1}{a}\ (a \neq 0) \in R$

iii) 全テノ有理函数 $\in R$

def. 2. R ノ element ヲ係数トスル微分方程式

$$(1)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + p_n(x) = 0$$

ノ解ノ一ツノ F.S. ヲ $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ トスル。（若シ必要アラバ初メカラ D ノ Teilbereich D' ヲ D ノ代リニト

ッテヲクコト＝ヨリ、コノ F. S. ハDデ有理型トスル) y 及ビ其ノ任意ノ order ノ微係数並ビニ R ノ element ノ有理函数ハDデ有理型デアル。斯ル全テノ有理型函数ノ集合 $R(y)$ ハ def. 1. ニ於ケル i), ii), iii) ヲ満足スル。$R(y)$ ノ element ヲ $y, y', y'', \cdots\cdots$ 及ビ R ノ element ノ有理函数トシテ表ハス仕方ハ幾通リモアリ得ル。コノコトヲ $R(y)$ ノ element ハ種々ノ expression ヲモツト呼ブコトニスル

Def. 3. $R(y)$ ノ element ヲ $R(y)$ ノ element ニ對應サセル一對一ノ對應 A ガ次ノ條件ヲ満足スルトキニ之ヲ $R(y)$ ノ Automorphism ト呼ブ。

i) $a \in R$ ナラ　　$a \longleftrightarrow a$

ii) $a \longleftrightarrow b$ ナラ　$a' \longleftrightarrow b'$

iii) $a \longleftrightarrow b$, $c \longleftrightarrow d$ ナラ

$ac \longleftrightarrow bd$, $a \pm c \longleftrightarrow b \pm d$, $\frac{1}{a} \longleftrightarrow \frac{1}{b}$.

Satz 1. $R(y)$ ノ Automorphism A ニハ unique ニ F. S. $y_1, \cdots\cdots, y_n$ ノ non singular linear substitution L ガ對應スル。コノ L ハ $a \in R$ ナル element 及ビ其全テノ order ノ微係数ヲソノ expression ノ如何ニ関ラズ invariant ニスル（之レヲ以下簡單ノタメニ L ガ a ヲ invariant ニスルト呼ブコトニスル）ト云フ性質ヲモツ。逆ニ斯ル性質ヲモツ non sing. l. subst. L ハ unique ニ $R(y)$ ノ一ツノ Auto-

morphism ヲ indugieren スル。

証. $Ay_i = Y_i$, $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$ ト置クトキ y_i ト共ニ Y_i モ (1) ヲ満足スルコトカラ分ル。

Satz 2. A全体ノ集合ハ group ヲ作ル。之ニ isomorph ナ L ノ group ニヨリA全体ノ集合ニ topologie ヲ與ヘルコトガ出來ル。L ノ全体ハ其ノ det. 0 ナラザル n次行列全体ノ作ル group ニ於テ開デアルカラ Cartan-Neumann ノ定理ニヨリ L 全体ノ Komponent (單位変換ト連結セルモノ全体) ハ連結リレン群ヲ作ル。

Def. 4. A全体ノ Komponent ナル連結リレン群 G ヲ $R(y)$ ノ Galois群ト呼ブ。

Def. 5. $R(y)$ ノ部分集合 $\overline{R}$ ガRヲ含ミ且ツ def. 1 ノ i), ii), iii) ヲ満足スルトキ $\overline{R}$ ヲ $R(y)$ ノ Unterkörper ト呼ブ。

Satz 3. $\overline{R}$ ノ任意ノ element α ニ對シテ α ヲ invariant ニスル (Satz 1 ニ於ケル約束參照) G ノ element ノ全体 G_α ハ G ニ於テ閉デテヲル。α ヲ $\overline{R}$ ニ於テ動カストキ得ラレル全テノ G_α ノ Durchschnitt G_∞ モ G ニ於テ閉デテヲル。

G_∞ ノ Komponent $\overline{G}$ ハ Cartan-Neumann ノ定理ニヨリ連結リレン群デアル。$\overline{G}$ ハ次ノ Maximal-eigenschaft ヲ有スル。G ノ部分リレン連結群 G' ガ $\overline{R}$ ヲ elementwise = invariant ニスルトラ

$G' \leqq \overline{G}$。

Def. 6. 上ノ如クシテ Unterkörper $\overline{R}$ ニ對シテ unique ニ定マル $\overline{G}$ ヲ $\overline{G}(\overline{R})$ ト書ク。逆ニ G ニ於イテ開ヂタ連結リい群 $\overline{G}$ が與ヘラレタトキ之レニヨッテ element wise = invariant ナ $R(y)$ ノ element ノ作ル Unterkörper $\overline{R}$ ヲ $\overline{R}(\overline{G})$ ト書ク。

Def. 7. Satz 3 ニ於テ G ノ代リニ其ノ det. 0 ナラザル九次行列全体ノ Komponent $\overline{R}$ ノ代リニ $R(y)$ ヲトッテ議論スレバ

$$G = G(R(y)).$$

Satz. 4. G = isomorphe ナ L ノ群ノ element ハソノ n^2 コノ coef. ノ間ノ幾ツカノ代数的関係ニヨッテ定義サレタ或代数的集合体 M ノ点ト考ヘルコトが出來ル。然モコノ群ノ單位変換ノ近傍ハ M ノ原点ノ近傍ト一致スル。コノ意味ニ於イテ G ヲ algebraic ナ group ト呼ブ。

証. $R(y)$ 任意ノ element α ヲ其ノ一ツノ expression ニ於テトッタトキ non sing. ナ l. s. L ガコノ α ノミヲ invariant ニスルト云フ條件ヲ書イテミルト n^2 コノ coef. ノ間ノ幾ツカノ代数的関係ヲ得ル。次ニ α' テ L ガ invariant ニスルタメニハ新ニ幾ツカノ代関ヲ附加シナケレバナラヌカモ知レヌ。α'', α''' ニツイテモ同様。又 α ヲ他ノ expression ニ於テ考ヘタトキモ同様。

α 以外ノ $R(y)$ ノ element β ヲトツタトキモ同様。シカシ G ハ連結リい群デ其ノ dimension ハ定ツテルカラ有限ノ段階デ代数的集合体ノ dimension ガ G ノ dimension ニ一致スル。

Satz 4'. $\alpha \in \overline{R}$ トシタトキ α ヲ invariant ニスル G ノ element 全体ノ Komponente ナル連結リい群ヲ $\overline{G}_\alpha$ トスレバ $\overline{G}_\alpha$ モ algebraic + group デアル。

Satz 5. 適當ニ $\overline{R}$ ノ element α ヲトレバ $\overline{G}(\overline{R}) = \overline{G}_\alpha$。

証。 $\overline{G}_\alpha \cong \overline{G}$ ハ明カダカラ $\overline{R}$ ノ任意ノ element β ニ對シテ $G_\alpha \subseteq G_\beta$ ナル如キ α ノ existenz ヲ云ヘバヨイ（$\overline{G}$ ノ Maximaleigenschaft; Satz 3）。各 $\overline{G}_\alpha$ ハ連結リい群ダカラ其ノ dimension 有界（$\leqq n^2$）ヨツテ α ガ $\overline{R}$ ヲ動クトキ其ノ dimension ガ minimum デアル如キ $\overline{G}_\alpha$ ガ少クトモ一ツ存在スル。ソノ一ツ $\overline{G}_\alpha$ ヲトレバヨイ。

偖モシ $\overline{G}_\alpha \neq G_\beta$ トスル。G_β ニ屬サヌ G ノ一般ノ element ニヨリ $\alpha \longrightarrow \alpha'$, $\beta \to \beta'$ ($\beta' \neq \beta$) トスル。$\dfrac{\alpha'-\alpha}{\beta'-\beta}$ ハ高々 n^2 コノ parameter ニ algebraic ニ depend スル (Satz 4, 4') ニヨツテ $\dfrac{\alpha'-\alpha}{\beta'-\beta}$ ハ或代数的微分方程式ヲ満足スル。故ニ $\dfrac{\alpha'-\alpha}{\beta'-\beta}$ ノ形ニ書ケナイ有

理函數 r が存在スル。故ニ

$$G_{\alpha-r\beta} \subseteq G_\beta \quad 從ッテ \quad G_{\alpha-r\beta} \subseteq G_\alpha$$

$$\therefore \quad G_{\alpha-r\beta} \subseteq G_\alpha \cdot G_\beta$$

假定ニヨッテ $G_\alpha \neq G_\beta$ ダカラ $G_{\alpha-r\beta} \neq G_\alpha$。$G_{\alpha-r\beta}$ ハ連結リい群 G_α ノ部分連結リい群ダカラ Schreier ノ基本定理ニヨリ $\dim G_{\alpha-r\beta} < \dim G_\alpha$ デナケレバナラナイ。之ハ G_α ノエラミ方ニ反スル。

系. $\bar{G}(\bar{R})$ ハ algebraic ナ群デアル (Satz 4')

Verschärfung des Picard–Vessiotscher Satz

$\bar{G}(\bar{R})$ ハ G ニ於テ閉デタ algebraic な group ニシテ

$$\bar{\bar{R}}(\bar{G}(\bar{R})) = \bar{R}$$

証明. $\bar{G}(\bar{R}) = \bar{G}_\alpha$, $\alpha \in \bar{R}$ (Satz 5)。

ヨッテ $\bar{\bar{R}}$ ノ element ハ $\alpha, \alpha', \alpha'', \cdots\cdots\cdots$ 及ビ R ノ element ニヨリ rational ニ表ハセル。コノ証明ハ Vessiot ノ定理 (Picard P. 551) ヲ modify スレバ得ラレルト思ヒマス。

ソレガ正シケレバ $\bar{R} \geqq \bar{\bar{R}}$。

一方 $\bar{\bar{R}} \geqq \bar{R}$ ハ定義カラ明カデスカラ $\bar{\bar{R}} = \bar{R}$。

Picard ノヤウニ Resolvent ヲ使ハズニヤラウト試ミタ譯デス。尚 Algebra ニ於ケル Galois ノ theory ニ於ケルガ如ク之ノ dual デアル。

G ノ algebraic + subgroup $\overline{G}$ = 對シ

$$\overline{\overline{G}}(\overline{R}(\overline{G})) = \overline{G}$$

ガ云ヘルト思フノデスガ未ダハッキリ出來テヲリマセンカラ出來タラ御高評ヲ乞ヒタイト思ヒマス。方針ハ大体次ノ通リ。上定理ヨリ $\overline{\overline{R}}(\overline{\overline{G}})$ トスレバ $\overline{\overline{R}} = \overline{R}$ ダカラ

$$\overline{G} \leqq \overline{\overline{G}}, \quad \overline{G} \neq \overline{\overline{G}}, \quad \overline{R}(\overline{G}) = \overline{\overline{R}}(\overline{\overline{G}})$$

カラ矛盾ガ導ケレバヨイ。即チ例ヘバ $\overline{G}$ ノ invariant = シテ $\overline{\overline{G}}$ ノ invariant デナイモノノ existenz サヘ云ヘレバヨイ。