



Title	Picard-Vessiot ノ理論ニ就テ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 51, p. 8-14
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74102
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

180. Picard-Vessiotノ理論ニ就テ

吉田 耕作 (阪大)

Picard (Traité 3) 及ビ Vessiot (École
norm. 3 série, tome 9) = 依ツテ組立テラレタ所謂
線形微分方程式ノ Galoisノ理論ノ essential + 部分
ヲ幾分 modern = 取扱ツテミタイト思ヒマス。

思ヒ違ヒヲシテル所モ澤山アリマセウシ又文献 = 暗イコ
トデスカラ御教示ヲ御願ヒスル次第デス。

Def. 1. 領域 D デ定義サレタ有理型函数 $a(x)$ ノ集合
 R ガ次ノ條件ヲ満足スルトキ = 之レヲ (D デ定義サレタ)
Körper ト呼ブ。

- i) $a \in R$ ナラ $a' \in R$ (a' ハ a ノ微係数)
- ii) $a, b \in R$ ナラ $a \pm b, ab, \frac{1}{a} (a \neq 0) \in R$
- iii) 全テノ有理函数 $\in R$

def. 2. R ノ element ヲ係数トスル微分方程式

$$(1) \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n(x) = 0$$

ノ解ノ一ツノ F. S. ヲ $y_1, y_2, \dots, y_n$ トスル。(若シ必
要アラバ初メカラ D ノ Teilbereich D' ヲ D ノ $\mathbb{A}^1$ リ = ト

ツテラクコト = ヨリ、コノ F. S. ハ D デ有理型トスル) y 及
 ビ其ノ任意ノ $order$ ノ微係数並ビ $= R$ ノ $element$ ノ
 有理函数ハ D デ有理型デアル。斯ル全テノ有理型函数ノ集合
 $R(y)$ ハ $def. 1.$ ニ於ケル i), ii), iii)ヲ満足スル。 $R(y)$ ノ
 $element$ ヲ $y, y', y'', \dots$ 及ビ R ノ $element$ ノ有理函
 数トシテ表ハス仕方ハ幾通りモアリ得ル。コノコトヲ $R(y)$ ノ
 $element$ ハ種々ノ expressionヲモツト呼ブコト
 = スル

Def. 3. $R(y)$ ノ $element$ ヲ $R(y)$ ノ $element$
 = 對應サセル一對一ノ對應 A ガ次ノ條件ヲ満足スルトキニ之
 ヲ $R(y)$ ノ $Automorphism$ ト呼ブ。

$$i) \quad a \in R \text{ナラ} \quad a \longleftrightarrow a$$

$$ii) \quad a \longleftrightarrow b \text{ナラ} \quad a' \longleftrightarrow b'$$

$$iii) \quad a \longleftrightarrow b, c \longleftrightarrow d \text{ナラ}$$

$$ac \longleftrightarrow bd, a \pm c \longleftrightarrow b \pm d, \frac{1}{a} \longleftrightarrow \frac{1}{b}.$$

Satz 1. $R(y)$ ノ $Automorphism A =$ ハ $unique$
 $=$ F. S. $y_1, \dots, y_n$ ノ $non\ singular\ linear$
 $substitution L$ ガ對應スル。コノ L ハ $a \in R$ ナル
 $element$ 及ビ其全テノ $order$ ノ微係数ヲ、 $expression$ ノ如何ニ
 關ラズ $invariant$ ニスル (之ヲ以下
 簡單ノタメニ L ガ a ヲ $invariant$ ニスルト呼ブコトニ
 スル)ト云フ性質ヲモツ。逆ニ斯ル性質ヲモツ $non\ sing.$
 $l. subst. L$ ハ $unique = R(y)$ ノ一ツノ $Auto-$

morphism を induzieren スル。

証. $A y_i = Y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ と置クトキ y_i と共 $= Y_i$ モ (1) を満足スルコトカラ分ル。

Satz 2. A 全体、集合ハ group を作ル。之 $=$ isomorph + L , group $=$ ヨリ A 全体、集合 $=$ topologie を與ヘルコトガ出來ル。 L , 全体ハ其、 $\det. 0$ ナラザル n 次行列全体、作ル group $=$ 於テ閉デテアルカラ Cartan-Heumann の定理 $=$ ヨリ L 全体、Komponent (單位変換ト連結セルモ、全体) ハ連結リレハ群を作ル。

Def. 4. A 全体、Komponent ナル連結リレハ群 G を $R(y)$, Galois 群ト呼ブ。

Def. 5. $R(y)$, 部分集合 $\bar{R}$ が R を含ミ且ツ def. 1 の i), ii), iii) を満足スルトキ $= \bar{R}$ を $R(y)$, Unterkörper ト呼ブ。

Satz 3. $\bar{R}$, 任意, element $\alpha =$ 對シテ α を invariant $=$ スル (Satz 1 $=$ 於ケル約束参照) G , element, 全体 G_α ハ $G =$ 於テ閉デテアル。 α を $\bar{R} =$ 於テ動かストキ得ラレル全テ、 G_α , Durchschnitt $G_\infty \in G =$ 於テ閉デテアル。

G_∞ , Komponent $\bar{G}$ ハ Cartan-Heumann, 定理 $=$ ヨリ連結リレハ群デアアル。 $\bar{G}$ ハ次, Maximal-eigenschaft を有スル。 G ノ部分リレハ連結群 G' が $\bar{R}$ を elementwise $=$ invariant $=$ スルナラ

$$G' \subseteq \bar{G}.$$

Def. 6. 上ノ如クシテ *Unterkörper* $\bar{R}$ = 對シテ *unique* = 定マル $\bar{G}$ ヲ $\bar{G}(\bar{R})$ ト書ク。逆 = G = 於イテ 閉ヂタ連結リイ群 $\bar{G}$ が與ヘラレタトキ之レ = ヨツテ *element wise = invariant* + $R(y)$ / *element* / 作ル *Unterkörper* $\bar{R}$ ヲ $\bar{R}(\bar{G})$ ト書ク。

Def. 7. Satz 3 = 於テ G / 代リ = 其 / *det. 0* ナラザル n 次行列全体 / *Komponent* $\bar{R}$ / 代リ = $R(y)$ ヲトツテ議論スレバ

$$G = G(R(y)).$$

Satz 4. G = *isomorphe* + L / 群 / *element* ハソノ n^2 コノ *coef.* ノ間ノ幾ツカノ代数的関係 = ヨツテ定義サレタ或代数的集合体 M ノ点ト考ヘルコトが出来ル。然モコノ群ノ單位変換ノ近傍ハ M ノ原点ノ近傍ト一致スル。コノ意味 = 於イテ G ヲ *algebraic + group* ト呼バ。

証. $R(y)$ 任意 / *element* α ヲ其ノ一ツノ *expression* = 於テトツタトキ *non sing.* + *l. s.* L ガコノ α ノ $\equiv$ *invariant* = スルト云フ條件ヲ書イテミルト n^2 コノ *coef.* ノ間ノ幾ツカノ代数的関係ヲ得ル。次 = α' テ L ガ *invariant* = スルタメ = ハ新ニ幾ツカノ代関ヲ附加シナケシバナラヌカモ知レヌ。 α'' , α''' = ツイテモ同様。又 α ヲ他ノ *expression* = 於テ考ヘタトキモ同様。

α 以外, $R(y)$, element β フトツタトキモ同様。シカ
シ G ハ連結リい群ガ其, dimension ハ定ツテルカラ有
限ノ段階ヲ代数的集合体, dimension が G , dimension
= 一致スル。

Satz 4'. $\alpha \in \bar{R}$ トシタトキ α 是 invariant =
スル G , element 全体ノ Komponent + ル 連結
リい群ヲ $\bar{G}_\alpha$ トスレバ $\bar{G}_\alpha$ モ algebraic + group
ナル。

Satz 5. 適當ニ $\bar{R}$, element α フトレバ
 $\bar{G}(\bar{R}) = \bar{G}_\alpha$ 。

証. $\bar{G}_\alpha \subseteq \bar{G}$ ハ明カダカラ $\bar{R}$ ノ任意ノ element β
= 對シテ $G_\alpha \subseteq G_\beta$ ナル如キ α , existenz フ云ハバヨ
イ ($\bar{G}$ ノ Maximal eigenschaft; Satz 3). 各 $\bar{G}_\alpha$
ハ連結リい群ガカラ其ノ dimension 有界 ($\leq n^2$) ヲツテ
 α ガ $\bar{R}$ フ動クトキ其ノ dimension ガ minimum ナ
アル如キ $\bar{G}_\alpha$ ガ シクトモ一ツ存在スル。ソノ一ツ $\bar{G}_\alpha$ フト
レバヨイ。

諸モシ $\bar{G}_\alpha \subsetneq G_\beta$ トスル。 G_β = 属サヌ G ノ一般ノ
element = ヲリ $\alpha \rightarrow \alpha'$, $\beta \rightarrow \beta'$ ($\beta' \neq \beta$) トスル。
 $\frac{\alpha' - \alpha}{\beta' - \beta}$ ハ高々 n^2 コノ parameter = algebraic =
depend スル (Satz 4, 4') = ヲツテ $\frac{\alpha' - \alpha}{\beta' - \beta}$ ハ或代数
的微分方程式ヲ満足スル。故ニ $\frac{\alpha' - \alpha}{\beta' - \beta}$ ノ形 = 書ケナイ有

理函数 γ が存在スル。故 =

$$G_{\alpha-r\beta} \subseteq G_{\beta} \quad \text{従ツテ} \quad G_{\alpha-r\beta} \subseteq G_{\alpha}$$

$$\therefore G_{\alpha-r\beta} \subseteq G_{\alpha} \cdot G_{\beta}$$

假定 = ヨツテ $G_{\alpha} \not\subseteq G_{\beta}$ ダカラ $G_{\alpha-r\beta} \not\subseteq G_{\alpha}$ 。 $G_{\alpha-r\beta}$ ハ連結リイ群 G_{α} ノ部分連結リイ群ダカラ Schreier ノ基本定理 I = ヨリ $\dim G_{\alpha-r\beta} < \dim G_{\alpha}$ デナケレバナラナイ。之ハ G_{α} ノエラミ方 = 反スル。

系. $\overline{G}(\overline{R})$ ハ algebraic + 群デアル (Satz 4')
Verschärfung des Picard-Vessiot'scher Satz

$\overline{G}(\overline{R})$ ハ G = 於テ閉デタ algebraic + group
= シテ

$$\overline{R}(\overline{G}(\overline{R})) = \overline{R}$$

証明. $\overline{G}(\overline{R}) = \overline{G}_{\alpha}$, $\alpha \in \overline{R}$ (Satz 5)。

ヨツテ $\overline{R}$ ノ element ハ $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ 及ビ R ノ element = ヨリ rational = 表ハセラル。コノ証明ハ Vessiot ノ定理 (Picard P. 551) ヲ modify スレバ得ラレルト思ヒマス。

ソレガ正シケレバ $\overline{R} \supseteq \overline{R}$ 。

一方 $\overline{R} \supseteq \overline{R}$ ハ定義カラ明カデスカラ $\overline{R} = \overline{R}$ 。

Picard ノ α = Resolvent ヲ使ハズ = α ラウト試ミタ譯デス。尚 Algebra = 於ケル Galois theory = 於ケルガ如ク之ノ dual デアル。

G , algebraic + subgroup $\overline{G}$ = 對シ

$$\overline{\overline{G}}(\overline{R}(\overline{G})) = \overline{G}$$

が云へレト思フノデスガ未ダハツキリ出來テアリマセンカラ
 出來タラ御高評ヲ乞ヒタイト思ヒマス。方針ハ大体次ノ通り。
 上定理ヨリ $\overline{\overline{R}}(\overline{\overline{G}})$ トスレバ $\overline{\overline{R}} = \overline{R}$ ダカラ

$$\overline{G} \leq \overline{\overline{G}}, \quad \overline{G} \neq \overline{\overline{G}}, \quad \overline{\overline{R}}(\overline{\overline{G}}) = \overline{\overline{R}}(\overline{\overline{G}})$$

カラ矛盾ヲ導ケレバヨイ。即チ例ヘバ $\overline{G}$ ノ invariant
 = シテ $\overline{\overline{G}}$ ノ invariant デナイモノノ existence サ
 ヘ云ヘレバヨイ。