OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Pseudo-regular function ノ應用 II
Author(s)	角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 52, p. 4-12
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74106
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

184. Pseudo-regular function ノ應用 II

角谷靜夫 (阪大)

Speiser ノ問題ニ pseudo-regular function ニヨル transformation ヲ應用シテアル種ノ Riemann 面ガ hyperfolic デアルタメノ十分條件ヲ求メマシタ。

ココニ考ヘル Riemann 面ハソノ分岐点ガスベテ log arithmic デ且ツソレラノ点ガ w 面上ノ三点 1, $e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $e^{\frac{4\pi}{3}i}$, 上ニアルモノノウチデ特ニソノ topological tree ガ symmetric ナモノデアリマス。即チ

$$M(\theta)=3.2^k, \quad \pi n_k \leqq \theta < \pi n_{k+1}$$

ナル $M(\theta)$ ヲモツ Riemann 面下ヲ考ヘマス。コニ

$$0=n_0<n_1<n_2<\cdots\cdots<n_k<\cdots\cdots$$

ハ整数デアリマス。故ニ下ノ topological tree ハ modular function ノ逆函数ノ Riemann 面ノ topological tree ノ原点カラ k 番目ニアル線分ヲ $\pi(n_k-n_{k-1})$ ノ長サニヒキノバシタモノデアル。

定理. $\sum \frac{n_{k+1}-n_k}{n_k-n_{k-1}}\cdot\frac{1}{2^k}$ ガ收斂スレバ下ハ hyperbolic デアル。

注意　$n_k = 3.2^k$ トオケバ、コレニ對應スル Riemann F_1 ハ hyperbolic デ

$$M_1(\theta) = n_k, \quad \pi n_k \leqq \theta < \pi n_{k+1}$$

トナル。トコロガ $w = e^{e^z}$ ノ逆函數ノ Riemann 面 F_2 ニ對シテハ

$$M_2(\theta) = 2\left[\frac{\theta}{\pi}\right] + 3$$

トナルカラ

$$M_2(\theta) \geqq M_1(\theta)$$

デアル。シカルニ F_2 ハ明カニ parabolic デアル。コレヨリ $M(\theta)$ ノ増加ノ程度ニヨッテ F ノ type ヲ決定スルコトハ不可能ナルコトガワカル。

証明：　小林氏ノ方法ニ倣ッテ Riemann 面 F ヲ変形シテ扱ヒ易イ形ニスル。（但シ小林氏ノトキハ変換ハ部分的ニ analytic デアッタガ今ハ必ズシモサウデナクテモ全体トシテ q ガ有界ナル如キ pseudo-regular ナ函數ニヨル変換デアレバヨイ）

先ヅ F ヲ F ノ對數的分岐点ヲ通ル半直線

$$\mathrm{Arg}\, w = \frac{2}{3} p\pi \quad (p = 0, 1 \text{ or } 2)$$

ニヨッテ切リ、F ヲ可附番無限個ノ次ノ何レカト合同ナ領域ニ分ケル。

$$D_1: \quad -\frac{\pi}{3} < \mathrm{Arg}\, w < \frac{\pi}{3}, \quad 0 < |w| < \infty;$$

$$D_2:\quad -\frac{2\pi}{3} < \mathrm{Arg}\, w < \frac{2\pi}{3} \qquad 0<|w|<\infty$$

D_1, D_2 ヲソノ原点ニ於ケル角ノ二等分線 $\mathrm{Arg}\, w = 0$ ニヨッテ切リ、ソレラヲ夫々

$$|W| = |w|,\quad \mathrm{Arg}\, W = \pm\frac{3}{2}\arg w;$$

$$|W| = |w|,\quad \mathrm{Arg}\, W = \pm\frac{3}{4}\arg w$$

ニヨッテ領域

$$D:\quad 0<\mathrm{Arg}\, W<\frac{\pi}{2},\quad 0<|W|<\infty$$

ニ変換スル。（$W=i$ ガFノ對数的分岐点ニ對應スルモノトスル）

Dハ

$$\zeta = \log\left(\frac{i-W}{i+W}\right)$$

ニヨッテ $\zeta=\xi+i\eta$ 平面ノ領域

$$S:\quad -\infty<\xi<0,\quad 0<\eta<\pi$$

ニウツセル。但

$$\mathrm{Arg}\, W = 0 \qquad \text{ガ}\ \xi=0,\quad 0<\eta<\pi$$

$$\mathrm{Arg}\, W = \frac{\pi}{2},\quad 0<|W|<1 \ \text{ガ}\ \eta=0,\quad -\infty<\xi<0$$

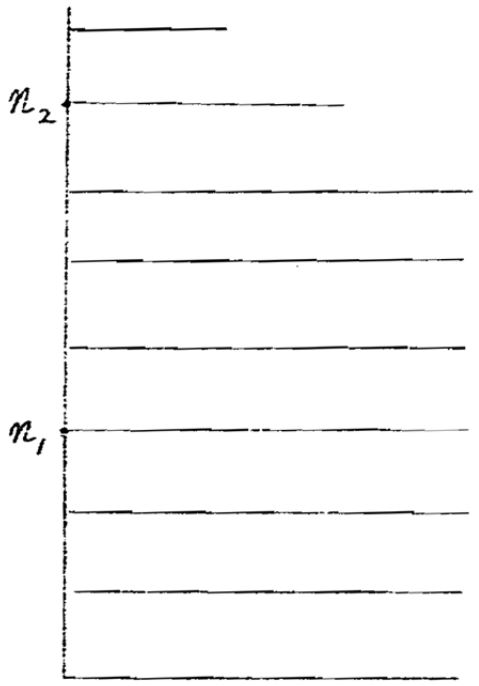
$$\mathrm{Arg}\, W = \frac{\pi}{2},\quad 1<|W|<\infty \ \text{ガ}\ \eta=\pi,\quad -\infty<\xi<0$$

ニ對應スル。

コノSヲ可附番無限個取ッテ、コレラヲ F ニ於ケル D_1,

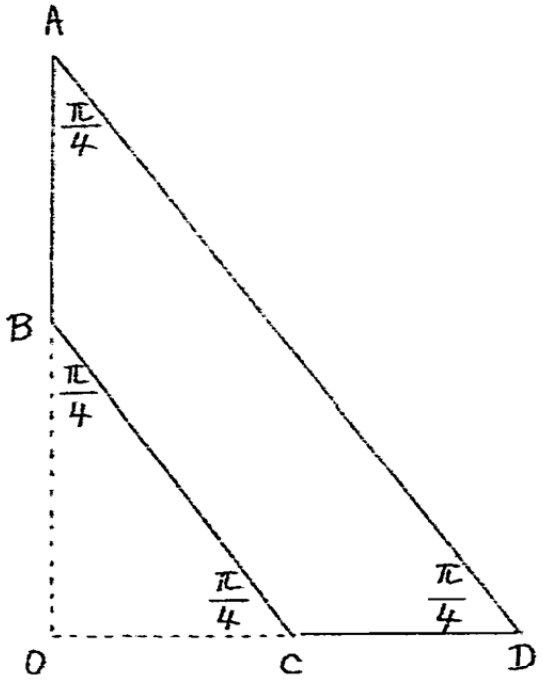
D_2ト topologically = 同等ナル如クツナギ合ハシテ、小林氏ノ作ラレタ Cylindrical surface ト同様ナ面 Σ ヲ作ル。

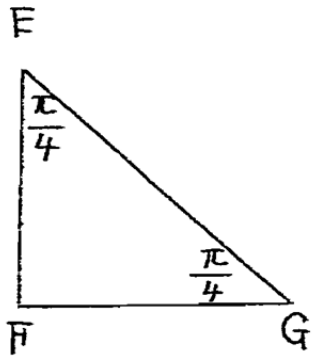
Σ ハ下ノ topological tree ノ各部分=Sヲ二枚ヅツ（両側ヘ一枚ヅツ）$\xi=0$, $0<\eta<\pi$ ナル部分=沿ッテ貼リツケテ、相隣ル S（topological tree ノ両側ヲ區別シテ考ヘル）ヲ $\eta=0$, $-\infty<\xi<0$（又ハ $\eta=\pi$, $-\infty<\xi<0$）ナルトコロ=沿ッテ連結シタモノデアル。Σ ヲ適當=疊ンデ右図ノ如クスル。コレヲ再ビ $\zeta=\xi+i\eta$ 平面上=考ヘレバ Σ ハ $\xi>0$, $\eta>0$ ナルトコロ=アリ、$\pi n_k \leqq \eta < \pi n_{k+1}$ ナルトコロ=ハ $2\cdot 3\cdot 2^k = 2\mu(\eta)$ 枚ノ面（裏ト表デ2倍トナル）ガ重ッテヰル。



Σ ヲ $\eta+\xi=\pi n_k$ ナル線 L_k =ヨッテ切断シ、Σ ノ L_k ト L_{k+1} トノ間=アル部分 T_k $(k\geqq 1)$ ヲ $S=\sigma+i\tau$ 平面ノ $0<\tau<2\pi$ ナル部分ヘ次ノ如ク ξ,η ノ一次変換=ヨッテ寫像スル。（一次函數モ pseudo-regular f. ト考ヘルコトガ出來ル）

T_k ハ次ノ如キ T_k', T_k'' 各、$3\cdot 2^k$ 枚（ソノウチ半分ハ裏返ヘシ=ナッテヰル）ヨリ成立シテヰル。





$EF = FG = \pi(n_{k+1} - n_k)$

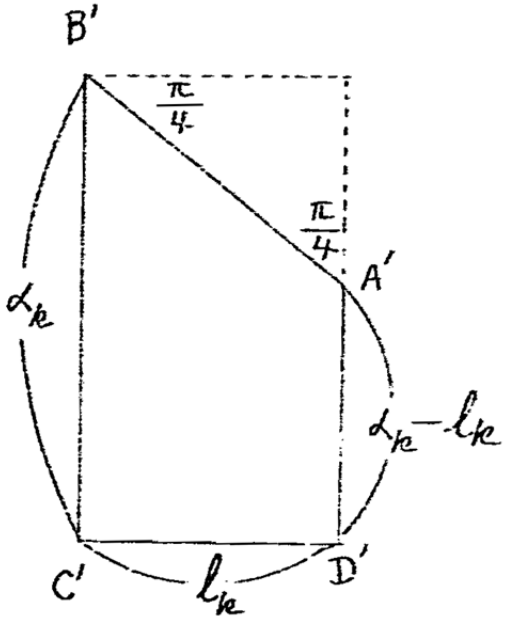
$AB = CD = \pi(n_{k+1} - n_k)$

$OB = OC = \pi(n_k - n_j)$, $j < k$

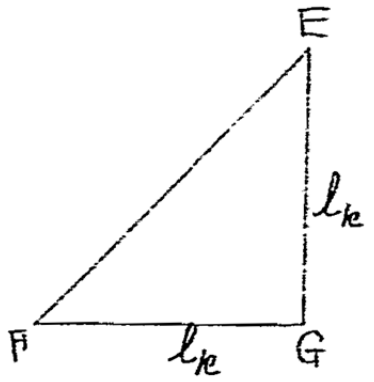
T_k' T_k''

T_k' ト T_k'' ハ AB, EF ノ線ニ沿ッテツナガリ、T_k' ト他ノ T_k' トハ CD ニ沿ッテ又、T_k'' ト他ノ T_k'' ハ FG ニ沿ッテツナガル。

T_k', T_k'' ヲ夫々次ノ如キ S 平面上ノ領域 Ω_k', Ω_k'' (又ハソノ裏ガヘシノ領域) = A, B, C, D; E, F, G ガ夫々 A′, B′, C′, D′; E′, F′, G′ (又ハソノ裏ガヘシ) ニ對應スル如キ一次変換ニヨッテ寫像スル。(コノ際各辺上ニテハ変換ハ相似変換ニナルモノトス)



Ω_k'



Ω_k''

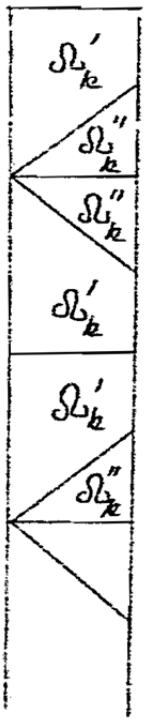
但シ $\alpha_k = \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$ ニシテ l_k ($l_k < \alpha_k$) ハ後ニ適當ニ定メルモノトスル。

コノトキ、T_k', T_k'' ノウチデ裏ガヘシニナッテヰルモノニハ、Jacobian < 0 ナル変換ヲホドコスコトニスル。

カクシテ得ラレタ Ω_k', Ω_k'' 又ハソノ裏ガヘシニナッタ領域ヲ、ハジメノ T_k ニ於テ T_k', T_k'' ガツナガッテヰタト同様ニツナギアハセレバ結局 T_k ハ

Ω_k: $0 < \sigma < l_k$, $0 < \tau < 2\pi$

($S = \sigma + i\tau$)



ヘ寫像サレル。(右図参照)

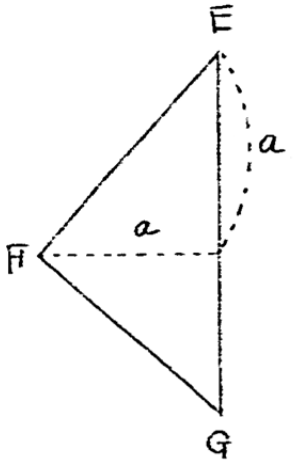
コノトキ $q + \frac{1}{q}$ ヲ計算スル。

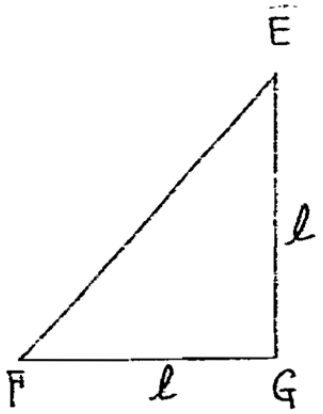
先ヅ T_k'': $(0 < |y| < x < a)$ ヲ

Ω_k'': $(0 < Y < X < l) = E, F, G$ ガ夫々 E', F', G' ニ對應スル如ク

$$X=\frac{l}{a}x,$$

$$Y=\frac{l(x+y)}{2a}$$





＝ヨッテ寫像スル。

コノトキ

$$q+\frac{1}{q}=3$$

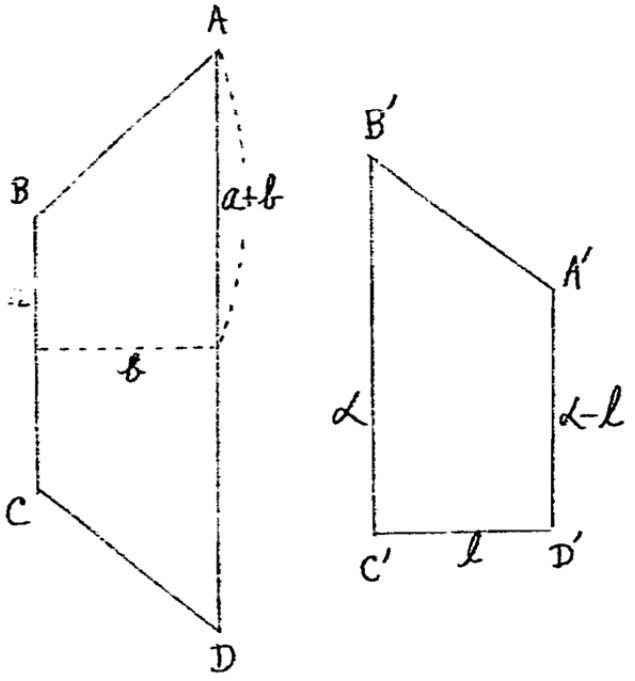
デアル。

次＝ T_k': $(0<x<b,$

$$|y|<x+a)$$

ヲ $\mathfrak{R}_k'$: $(0<X<l,$

$$|Y|<\alpha-X)$$



＝

$$X=\frac{l}{f}x$$

$$Y=\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{2(a+x)}\right)\left(\alpha-\frac{l}{f}x\right)$$

＝ヨッテ寫像スル。コノトキ

$$q+\frac{1}{q}=\frac{\frac{l^2}{k^2}+\left\{\frac{y}{2(a+x)^2}\left(\alpha-\frac{l}{f}x\right)+\frac{l}{f}\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{2(a+x)}\right)\right\}^2+\left\{\frac{1}{2(a+x)}\left(\alpha-\frac{l}{f}x\right)\right\}^2}{\frac{l}{f}\ \frac{1}{2(a+x)}\left(\alpha-\frac{l}{f}x\right)}$$

$$\leqq\frac{4l(a+b)}{b(\alpha-l)}+\frac{\alpha b}{la}+2$$

次ニ l ヲ定メルタメ b ノ大キサニヨッテ二ツノ場合ニ分ケル。

(i) $b \leqq \frac{a}{2}$ ナラバ $l = \frac{2b}{a}$ トオケバ $\left(l < \frac{2}{2}\right)$

$$q + \frac{1}{q} \leqq \frac{4(a+b)}{(a-b)} + 3 = 15$$

(ii) $b > \frac{a}{2}$ ナラバ $l = \frac{2}{2}$ トオケバ

$$q + \frac{1}{q} \leqq 14 + 2\frac{b}{a}$$

故ニ l ヲ斯ノ如ク定メルコトニスレバ常ニ

$$q < q + \frac{1}{q} \leqq 15 + 2\frac{b}{a}$$

トナル。シカモ

$$\sum l_k \leqq \sum \frac{2b}{2} = \frac{1}{2} \sum \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} < \infty$$

デアルカラ結局 Σ ハ $0 < \sigma < 2\pi$, $-\infty < \tau < \infty$。

ヘ $q < 15 + 2\frac{b}{a}$ ナル函数ヨッテ写像サレル。

(Σ ノ L_1 ヨリ囲マレタ部分ハ $-\infty < \tau < l_1$, $0 < \sigma < 2\pi$ ニ適当ニ q ガ有界ナル函数ヨリ作ルコトガ出来ル)

次ニ S 平面カラ Σ ヘノ逆ノ変換ヲ考ヘレバ 136 号定理 6 ノ証明ト同様ニシテ

$$\lim_{\sigma \to \sigma_0 - 0} \int^{\sigma} q(\sigma)\, d\sigma < \infty$$

ナラバ Σ シタガッテ下ガ hyperbolic トナルコトガ

カル。即チ

$$\sum\left(15+2\frac{b_k}{a_k}\right)l_k \quad \text{又ハ} \quad \sum\frac{b_k}{a_k}l_k$$

ガ収斂スレバヨイ。シカルニ

$$a_k=\frac{\pi}{\sqrt{2}}(x_k-x_j)\geqq\frac{\pi}{\sqrt{2}}(x_k-x_{k-1})$$

$$b_k=\frac{\pi}{\sqrt{2}}(x_{k+1}-x_k)$$

$$l_k\leqq\frac{d_k}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3\cdot 2^k}$$

デアルカラ結局

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_{k+1}-x_k}{x_k-x_{k-1}}\ \frac{1}{2^k}$$

ガ収斂スレバ十分デアル。（証明終）