



Title	Pseudo-regular function ノ 應用 II
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 52, p. 4-12
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74106
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

184. Pseudo-regular function

/ 應用 II

角谷静夫 (阪大)

Speiser, 問題 = pseudo-regular function
= ヨル transformation を應用シテアル種ノ Rie-
mann 面ガ hyperfolic デアルタメノ十分條件ヲ求メ
マシタ。

ココニ考ヘル Riemann 面ハソノ分岐点ガスベテ
log arithmic デ且ツソレヲノ点ガ W 面上ノ点 1,
 $e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $e^{\frac{4\pi}{3}i}$, 上ニアルモノノウチデ特ニソノ topo-
logical tree ガ symmetric ナモノデアリマス。即
チ

$$\mu(\theta) = 3 \cdot 2^k, \quad \pi n_k \leq \theta < \pi n_{k+1}$$

ナル $\mu(\theta)$ ナモノヲ Riemann 面ニ考ヘマス。コノニ

$$0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

ハ整数デアリマス。故ニ F ノ topological tree ハ mo-
dular function, 逆函数, Riemann 面,
topological tree, 原点カラ k 番目ニアル線分ヲ
 $\pi(n_k - n_{k-1})$ ノ長サニヒキノバシタモノデアル。

定理. $\sum \frac{n_{k+1} - n_k}{n_k - n_{k-1}} \cdot \frac{1}{2^k}$ ガ收斂スレバ F ハ hyper-
bolic デアル。

注意 $\pi_k = 3.2^k$ トオケバ、コレニ對應スル Riemann
 F_1 ハ hyperbolic デ

$$\mu_1(\theta) = \pi_k, \quad \pi \pi_k \leq \theta < \pi \pi_{k+1}$$

トナル。トコロガ $w = e^{e^z}$ ノ逆函数、Riemann 面 F_2
 = 對シテハ

$$\mu_2(\theta) = 2 \left\lfloor \frac{\theta}{\pi} \right\rfloor + 3$$

トナルカラ

$$\mu_2(\theta) \geq \mu_1(\theta)$$

デアル。シカル = F_2 ハ明カ = parabolic デアル。コレ
 ヨリ $\mu(\theta)$ ノ増加ノ程度ニヨツテ F ノ type ヲ決定スルコ
 トハ不可能ナルコトガワカル。

証明: 小林氏ノ方法ニ倣ツテ Riemann 面 F ヲ変形
 シテ極ヒ易イ形ニスル。(但シ小林氏ノトキハ変換ハ部分的
 = analytic デアツタガ今ハ必ズシモサウデナクテモ全
 体トレテ g ガ有界ナル如キ pseudo-regular ナ函数ニ
 ヨル変換デアレバヨイ)

先ツ F ヲ F ノ對數的分支点ヲ通ル半直線

$$\text{Arg } w = \frac{2}{3} p\pi \quad (p = 0, 1 \text{ or } 2)$$

ニヨツテ切り、 F ヲ可附番無限個ノ次ノ何レカト合同ノ領域
 ニ分ケル。

$$D_1: \quad -\frac{\pi}{3} < \text{Arg } w < \frac{\pi}{3}, \quad 0 < |w| < \infty;$$

$$D_2: -\frac{2\pi}{3} < \text{Arg } w < \frac{2\pi}{3} \quad 0 < |w| < \infty$$

D_1, D_2 の原点 = 於ける角ノ二等分線 $\text{Arg } w = 0 = \exists$
ツテ切り、ソレヲ夫々

$$|w| = |W|, \quad \text{Arg } W = \pm \frac{3}{2} \arg w;$$

$$|w| = |W|, \quad \text{Arg } W = \pm \frac{3}{4} \arg w$$

= ヲツテ領域

$$D: 0 < \text{Arg } W < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < |W| < \infty$$

= 変換スル。($W=i$ が F ノ對数的分岐点 = 對應スルモノ
トスル)

D ハ

$$\zeta = \log \left(\frac{i - W}{i + W} \right)$$

= ヲツテ $\zeta = \xi + i\eta$ 平面, 領域

$$S: -\infty < \xi < 0, \quad 0 < \eta < \pi$$

= ツツセル。但

$$\text{Arg } W = 0 \quad \text{ガ } \xi = 0, \quad 0 < \eta < \pi$$

$$\text{Arg } W = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < |W| < 1 \quad \text{ガ } \eta = 0, \quad -\infty < \xi < 0$$

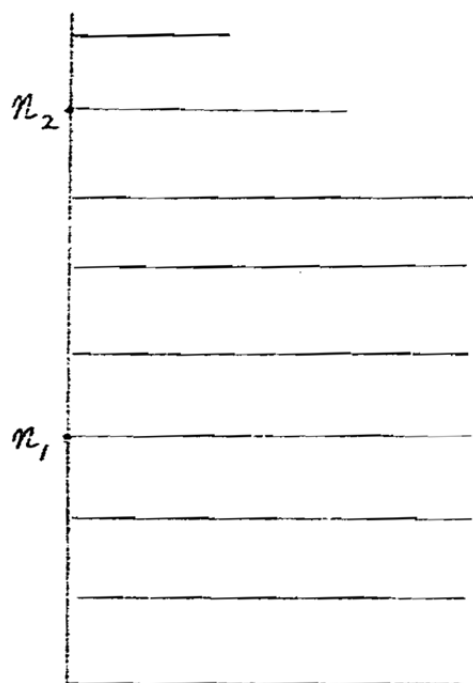
$$\text{Arg } W = \frac{\pi}{2}, \quad 1 < |W| < \infty \quad \text{ガ } \eta = \pi, \quad -\infty < \xi < 0$$

= 對應スル。

コノ S テ可附番無限個取ツテ、コレヲ F = 於ける D_1 ,

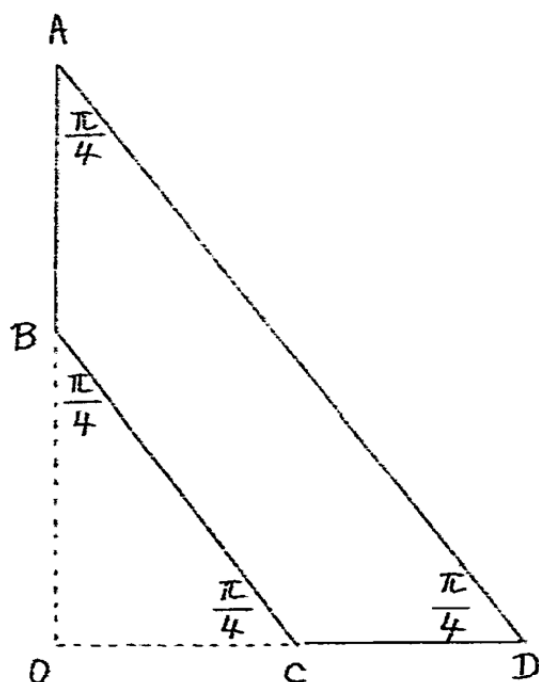
D_2 ト *topologically* = 同等ナル如クツナギ合ハシテ、小林氏ノ作アレタ *Cylindrical surface* ト同様ナ面 Σ ヲ作ル。

Σ ハ $\mathbb{R}$ ノ *topological tree* ノ各部分 = S テ二枚ヅツ (両側ヘ一枚ヅツ) $\xi=0$, $0 < \eta < \pi$ ナル部分 = 沿ッテ貼リツケテ、相隣ル S (*topological tree* ノ両側ヲ區別シテ考ヘル) ヲ $\eta=0$, $-\infty < \xi < 0$ (又ハ $\eta=\pi$, $-\infty < \xi < 0$) ナルトコロ = 沿ッテ連結シタモノデアル。 Σ ヲ適當ニ疊ンデ右図ノ如クスル。コレヲ再ビ $\zeta = \xi + i\eta$ 平面上ニ考ヘレバ Σ ハ $\xi > 0$, $\eta > 0$ ナルトコロ = アリ、 $\pi n_k \leq \eta < \pi n_{k+1}$ ナルトコロ = ハ $2 \cdot 3 \cdot 2^k = 2\mu(\eta)$ 枚ノ面 (裏ト表デ2倍トナル) が重ツテキル。



Σ ヲ $\eta + \xi = \pi n_k$ ナル線 L_k = ヨツテ切断シ、 Σ ノ L_k ト L_{k+1} トノ間 = アル部分 T_k ($k \geq 1$) ヲ $S = \sigma + i\tau$ 平面ノ $0 < \tau < 2\pi$ ナル部分ヘ次ノ如ク ξ, η ノ一次変換 = ヨツテ寫像スル。(一次函数モ *pseudo-regular f.* ト考ヘルコトが出来ル)

T_k ハ次ノ如キ T'_k, T''_k 各、 $3 \cdot 2^k$ 枚 (ソノうち半分ハ裏返ヘシ = ナツテキル) ヨリ成立シテキル。



$$AB=CD=\pi(n_{k+1}-n_k)$$

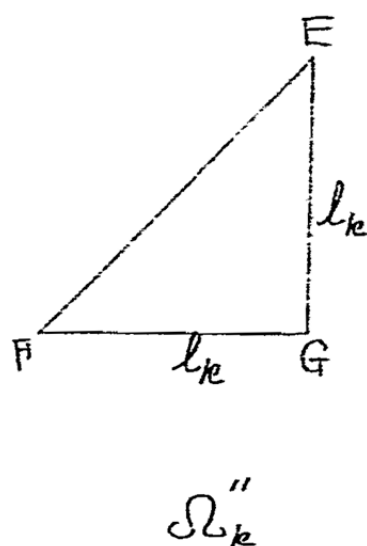
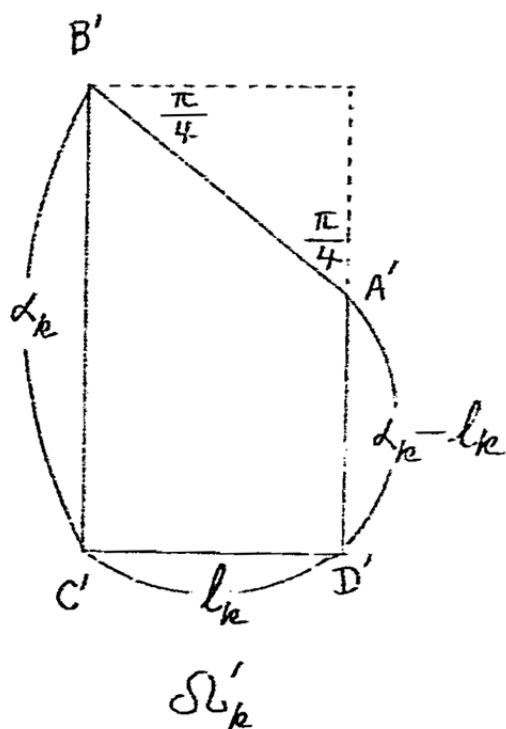
$$OB=OC=\pi(n_k-n_j), \quad j < k$$

$$T'_k$$

$$T''_k$$

T'_k と T''_k は AB, EF の線 = 沿ッテツナガリ、 T'_k と他、 T'_k とは CD = 沿ッテ又、 T''_k と他、 T''_k は FG = 沿ッテツナガル。

T'_k, T''_k を夫々次ノ如キ S 平面上ノ領域 Ω'_k, Ω''_k (又ハソノ裏ガヘシノ領域) = $A, B, C, D; E, F, G$ ガ夫々 $A', B', C', D'; E', F', G'$ (又ハソノ裏ガヘシ) = 對應スル如キ一次変換 = ヨツテ寫像スル。(コノ際各边上 = テハ変換ハ相似変換 = ナルモノトス)



但シ $\alpha_k = \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} = \text{シテ } l_k (l_k < \alpha_k)$ ハ後ニ適當ニ定メルモノトスル。

コノトキ、 T'_k, T''_k ノウチデ裏ガヘシニナツテキルモノニハ、 $Jacobian < 0$ ナル変換ヲホドコスコトニスル。

カクシテ得ラレタ Ω'_k, Ω''_k ヌハソノ裏ガヘシニナツタ領域ヲ、ハジメノ $T_k = \text{於テ } T'_k, T''_k$ ガツナガツテキタト同様ニツナギアハセレバ結局 T_k ハ

$$\Omega_k: 0 < \sigma < l_k, 0 < \tau < 2\pi$$

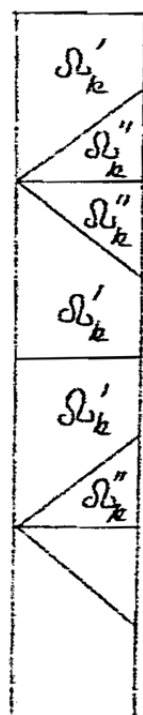
($S = \sigma + i\tau$)

ニ寫像サレル。(右図参照)

コノトキ $q + \frac{1}{q}$ ヲ計算スル。

先ヅ $T''_k: (0 < |y| < x < a)$ ヲ

$\Omega''_k: (0 < Y < X < l) = E, F, G$ が夫々 $E', F', G' =$ 對應スル如ク

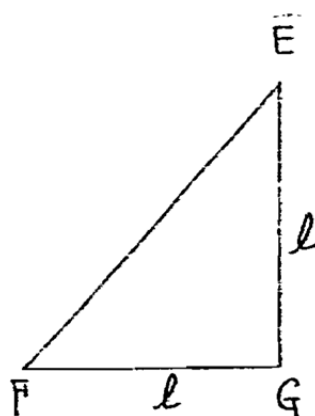
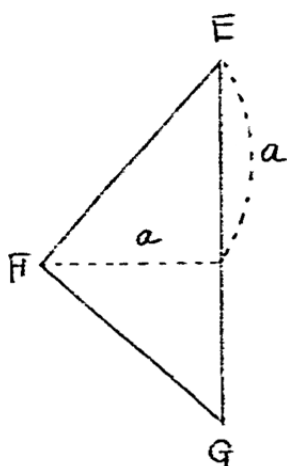


$$X = \frac{l}{a} x,$$

$$Y = \frac{l(x+y)}{2a}$$

= ヲツテ寫像スル。

コノトキ



$$g + \frac{1}{g} = 3$$

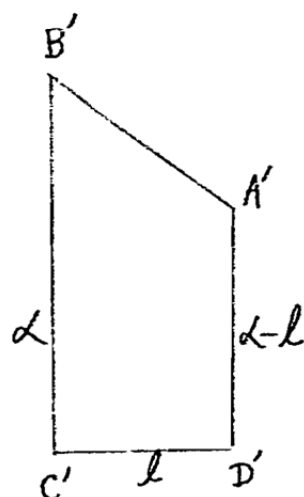
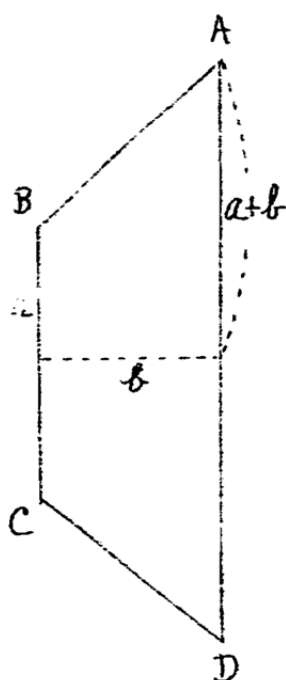
ヲアル。

$$x = T'_k: (0 < x < b, \\ |y| < x + a)$$

$$\text{ヲ } S'_k: (0 < x < l, \\ |y| < \alpha - x)$$

=

$$x = \frac{l}{f} x$$



$$Y = \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2(a+x)} \right) \left(\alpha - \frac{l}{f} x \right)$$

= ヲツテ寫像スル。コノトキ

$$g + \frac{1}{g} = \frac{\frac{l^2}{b^2} + \left\{ \frac{y}{2(a+x)} \left(\alpha - \frac{l}{f} x \right) + \frac{l}{f} \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2(a+x)} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{2(a+x)} \left(\alpha - \frac{l}{f} x \right) \right\}^2}{\frac{l}{f} \frac{1}{2(a+x)} \left(\alpha - \frac{l}{f} x \right)}$$

$$\leq \frac{4l(a+b)}{b(\alpha-l)} + \frac{\alpha b}{la} + 2$$

次 = l が定数 $\times$ $\log \times b$ の大キサ = ヨツテニツノ場合 = 分
 $\%.$

$$(i) \quad b \leq \frac{a}{2} \quad \text{ナラバ} \quad l = \frac{ab}{a} \quad \text{トオケバ} \quad (l < \frac{a}{2})$$

$$g + \frac{1}{g} \leq \frac{4(a+b)}{(a-b)} + 3 = 15$$

$$(ii) \quad b > \frac{a}{2} \quad \text{ナラバ} \quad l = \frac{a}{2} \quad \text{トオケバ}$$

$$g + \frac{1}{g} \leq 14 + 2 \frac{b}{a}$$

故 = l が斯ノ如ク定ムルコト = スレバ當ニ

$$g < g + \frac{1}{g} \leq 15 + 2 \frac{b}{a}$$

トナル。シカモ

$$\sum l_k \leq \sum \frac{ab}{2} = \frac{1}{2} \sum \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} < \infty$$

ガアルカラ結局 Σ ハ $0 < \tau < 2\pi$, $-\infty < \sigma < \infty$

ヘ $g < 15 + 2 \frac{b}{a}$ ナル函数 = ヨツテ寫像サレル。

(Σ ノ L_1 = ヨリ囲マレタ部分ハ $-\infty < \sigma < l_1$, $0 < \tau < 2\pi$
 = 適當 = g が有界ナル函数 = ヨリシツスコトが出来ル)

次 = S 平面カラ Σ ヘノ逆ノ変換ヲ考ヘレバ 136 号定
 理 6 ノ証明ト同様ニシテ

$$\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_0 - 0} \int_{\sigma_0}^{\sigma} g(\sigma) d\sigma < \infty$$

ナラバ Σ シタガツテ F が hyperbolic トナルコトガ

カル。即ち

$$\sum \left(15 + 2 \frac{b_k}{a_k}\right) l_k \quad \text{又ハ} \quad \sum \frac{b_k}{a_k} l_k$$

が収斂スレバヨイ。シカル＝

$$a_k = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (n_k - n_j) \geq \frac{\pi}{\sqrt{2}} (n_k - n_{k-1})$$

$$b_k = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (n_{k+1} - n_k)$$

$$l_k \leq \frac{L_k}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$$

デアルカラ結局

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_{k+1} - n_k}{n_k - n_{k-1}} \cdot \frac{1}{2^k}$$

が収斂スレバ十分デアル。(証明終)