



Title	可分集合ノ一性質
Author(s)	稲垣, 武
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 53, p. 1-7
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74107
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

185. 可分集合ノ性質

稲垣 武 (北大)

集合 E アルトキ E ノ部分集合カラナル單調整列族 $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}$ が *Stationnaire* デアルトキ E ハ如何ナル性質ヲ有サネバナテナイカヲ考ヘ、ソレカラ得ラレル、ニノ結果ヲ掲ゲテ見ヤウ。

性質1: 集合 E ノ部分集合カラナル減少整列族 $\mathcal{F} = \{F_\alpha\} =$
於テ凡テノ $\alpha =$ ツキ F_α が $F_{\alpha+1}$ ノ外苞 = 含マレザ
ルトキ $\mathcal{F}$ ハ可附番デアル。

カナル性質ヲ有スル集合 E ハヨク知ラレテキル如ク起ル、こ
むはくヒデアル。性質1 = 對應シテ次ノ性質ガ考ヘラレル。

性質2: 集合 E ノ部分集合カラナル増加整列族 $\mathcal{F} = \{F_\alpha\} =$
於テ凡テノ $\alpha =$ ツキ $F_{\alpha+1}$ が F_α ノ外苞 = 含マレザ
ルトキ $\mathcal{F}$ ハ可附番デアル。

カナル集合 $E =$ 就テハ: W. Sierpiński: *sur l'équivalence de trois propriétés des ensembles abstraits. Fund. Math. Tome II. 1921.*
P. 179—188.

= 於テ, S' —空間 = ツイテ論ジテアル、コノ証明ト殆ンド
同様 = シテ V —空間デ論ズルコトが出来ル。即チ

定理1: 性質2ヲ有スル集合 E ノ任意ノ部分集合ハ可分デア
ル。及コノ逆が成立スル。

証明: E ノ或ル非可附番部分集合 M ハ可分ナラズトスル。

M ノ要素ヲ次ノ如ク並べル。

$$p_1, p_2, \dots, p_\alpha, \dots, \alpha < \eta, \quad \eta \geq \aleph_1.$$

今 $g_1 = p_1$ トおく。 $1 \leq \xi < \alpha$ ナルニテ g_ξ が定義サレタトシテ g_α ヲ次ノ如ク定義スル。

$$Q_\alpha = \sum_{\xi < \alpha} g_\xi \quad (\alpha < \aleph_1) \text{ トおく。}$$

Q_α ハ可附番デ且ツ M が可分ナラザル假定ヨリ

$$M - (Q_\alpha + Q'_\alpha) \neq \emptyset$$

今 $M - (Q_\alpha + Q'_\alpha)$ = 含まレル要素ノ最初ノモノヲ g_α ト定メル、扱テ

$$F_\alpha = Q_\alpha \quad (\alpha < \aleph_1)$$

ト定義スレバ、明カニ

$$F_\alpha \subset F_{\alpha+1}, \quad F_{\alpha+1} - (F_\alpha + F'_\alpha) \ni g_\alpha$$

コレハ性質 2 ナル假定ニ反ス。

次ニ E ノ任意ノ部分集合ハ可分デアルトキ、性質 2 ヲ満足セザルモノガアツタト假定スル、コレヲ $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}$ トスル。

$$F_{\alpha+1} - (F_\alpha + F'_\alpha) \ni g_\alpha$$

トオケバ

$$F_\alpha \supseteq F_{\xi+1} \quad \xi < \alpha$$

$$F_\alpha \ni g_\xi$$

$$(F_\alpha + F'_\alpha) \cdot g_\alpha = 0$$

$$g_1, g_2, \dots, g_n, \dots \quad (\alpha < \omega)$$

トシ $M = \{g_\alpha\}$ を考へル、 M が可分ナラザルコトヲ示サシ。

若シ M が可分ナリトスレバ、 M 内 = 可附番部分集合

$$N = \{g_{\mu_n}\} \text{ アリテ、 } N + N' \supseteq M \text{ トナル。}$$

但し $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots \quad (\mu < \omega)$

ナル高々第二級ノ順序数 μ が存在スル。

$$F_{\mu+1} \ni g_\mu$$

$$g_\mu \cdot (F_\mu + F'_\mu) = 0$$

$$\text{又 } F_\mu \ni g_{\mu_n} \quad \therefore F_\mu \ni \{g_{\mu_n}\}$$

$$\therefore F'_\mu \ni \{g_{\mu_n}\}'$$

$$\therefore g_\mu \cdot F'_\mu \ni g_\mu \cdot \{g_{\mu_n}\}' = 0$$

コレハ $N + N' \supseteq M$ ナル假定 = 反ス。 Q.E.D.

性質 1 又ハ性質 2 が成立スレバ、“互 = 相素ナル開集合族ハ高々可附番デアル”コトハヨク知ラレテホルが又次ノ定理が成立スル。

定理 2: 性質 1, 又ハ性質 2 が成立スレバ

性質 3: 任意ノ部分集合 = 於テ、ソコデ互 = 相素デ且ツ内点ヲ有スル集合族ハ高々可附番デアル。

コノ証明ハ此処デハ略シテオケ、カニル性質ヲ有スル集合ハ如何ナルモノナルカヲ調べヤウ。

定義: 集合 E ノ任意ノ非可附番部分集合が自己 = 属スル集積点ヲ有スルトヤ、 E ヲ超以こむばくヒト云フ。

定理3: ∇ -空間 = 於テ次ノ四ツノ性質ハ同値デアアル。

- (1) 集合 E ノ任意ノ部分集合 = 於テ、ソコデ互ニ素デ内点ヲ有スル集合族ハ高々可附番デアアル。
- (2) 集合 E ハ超メニむばくヒデアアル。
- (3) 集合 E ノ部分集合カラナル減少整列族 $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}$ = 於テ凡テノ α = ツキ $F_\alpha - F_{\alpha+1}$ ガ E = 於テ縁集合ナラザレバ $\mathcal{F}$ ハ可附番デアアル。
- (4) 集合 E ノ部分集合カラナル増加整列族 $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}$ = 於テ凡テノ α = ツキ $F_{\alpha+1} - F_\alpha$ ガ E = 於テ縁集合ナラザレバ $\mathcal{F}$ ハ可附番デアアル。

証明: (1) $\rightarrow$ (2): E ハ超メニむばくヒナラズト假定スル。

從ツテ E ノ非可附番部分集合 M アリテ集積点ヲ有セナイ。

故ニ M ノ任意ノ点 p = 或ル近傍 $\nabla(p)$ アリテ $\nabla(p) \cdot M = p$ トナル、然レテ $\nabla(p) \cdot M$ ハ M = 於テ内点ヲ有スル集合デアアル、從ツテカナル近傍族 $\{\nabla(p) \cdot M\}$ ヲ考フレバ、コレハ M デ互ニ素デ且ツ内点ヲ有シ、非可附番デアアル、コレハ (1) ナル假定ニ反スル。

(2) $\rightarrow$ (3): 減少整列族 $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_\alpha \supset \dots$

ガ非可附番ナリトスル。 $F_\alpha - F_{\alpha+1}$ ハ E デ縁集合ナラザル故 $F_\alpha - F_{\alpha+1} \ni p_\alpha$ ナル点アリテ或ル近傍 $\nabla_\alpha(p_\alpha)$ = 對シテハ $F_\alpha \supset \nabla_\alpha(p_\alpha)$, $F_{\alpha+1} \cdot \nabla_\alpha(p_\alpha) = \emptyset$

カナル点 p ノ集合 $\{p_\alpha\}$ ヲ考フレバコレハ非可附番デ且

集積点ヲ有シナイ、故 = (2) ナル假定 = 反ス。

(3) $\rightarrow$ (4): 増加整列族 $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_\alpha \subset \dots$ デ

$F_{\alpha+1} - F_\alpha$ ハ E デ縁集合ナラザル故

$$CF_1 \supset CF_2 \supset \dots \supset CF_\alpha \supset \dots$$

且ツ $CF_\alpha - CF_{\alpha+1}$ ハ E デ縁集合デナイ。

故 = (3) = ヨリ $\{CF_\alpha\}$ ハ高々可附番、從ツテ $\{F_\alpha\}$ ハ高々可附番デアル。

(4) $\rightarrow$ (1): $E \supset M$ トシ M デ互 = 素デ且ツ内点ヲ有スル集合族デ非可附番ナルモノガアリトシ、コレヲ $\{M_\alpha\}$ トスル。

$$\text{今 } F_\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} M_\beta \text{ トオケバ}$$

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_\alpha \subset \dots$$

$$\text{且ツ } F_{\alpha+1} - F_\alpha = M_{\alpha+1}$$

トナリ、 M デ縁集合デナイ。然ル $\{F_\alpha\}$ ハ非可附番、

コレハ(4)ナル假定 = 反ス。 Q.E.D.

次 = 近傍系 = Hausdorff ノ第二公理ヲ導入スル。

公理(B): $U(x)$ 及ビ $V(x)$ ノ同ノ点 x ノニツノ近傍トスル、然ルトキハ x ノ近傍 $W(x) = \text{シテ } U(x) \cdot V(x)$ = 属スルモノガアル。

定理4: 性質3ヲ有スル集合ガ可分ナラザレバ凝集点ヲ有ス。

証明: 集合 E ノ部分集合 M ガ可分ナラズトシテ、 M ガ凝集点ヲ有スルコトヲ示セバヨイ。

M ハ凝集点ヲ有セズト假定スル、 M ノ任意ノ一点 $p_1 =$
 對シテハ適當ナル近傍 $V_1(p_1)$ アリテ $M \cdot V_1(p_1)$ ハ高々可
 附番デアル、一般ニ $1 \leq \beta < \alpha$ ナル凡テ、 $\beta =$ 對シテ p_β 。
 $V_\beta(p_\beta)$ が定義サレタルトキ p_α 、 $V_\alpha(p_\alpha)$ ヲ次ノ如
 ク定メル。

$$M - \overline{\left(\sum_{\beta < \alpha} V_\beta(p_\beta) \right)} \quad (\alpha < \Omega)$$

ヲ考ヘルト、 M ハ可分ナラザル假定ニヨリ空集合デナイ。
 故ニソノ一点ヲ p_α トスル、 p_α ハ $\sum_{\beta < \alpha} V_\beta(p_\beta)$ ノ外点
 ナル故適當ナル近傍 $W(p_\alpha)$ アリテ

$$W(p_\alpha) \cdot \left(\sum_{\beta < \alpha} V_\beta(p_\beta) \right) = 0$$

又 p_α ハ M ノ凝集点ナラザル故ニ近傍 $U(p_\alpha)$ アリテ
 $U(p_\alpha) \cdot M$ ハ高々可附番、從ツテ $W(p_\alpha) \cdot U(p_\alpha) \supseteq V_\alpha(p_\alpha)$
 ナル近傍ヲ求メルコトが出来ル。カクシテ互ニ素デ内点
 ヲ有スル集合族 $\{V_\alpha(p_\alpha)\}$ ヲ得ル、コノ集合族ハ可附番
 ナラバ M ハ可分トナリ假定ニ反ス、又非可附番ナラバ
性質3 ニ反ス、即チ M ハ凝集点ヲ有サネバナラナイ。

Q. E. D.

系1. 性質3ヲ有スル集合 E が高々可附番個ヨリ凝集点ヲ有
 セザルトキ、 E ハ可分集合デアル。

系2. 性質3ヲ有スル集合 E ハ可分集合ト凝集点ノ集合トニ
 分解出来ル、即チ

$$E = C + (E - C)$$

$C = C \cap E$, 凝集点ノ集合.

$E - C$ ハ可分集合デアル。