OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | 點集合論ニ於ケル類ト測度トノ概念ニ就イテ（Ｉ） |
| Author(s) | 近藤, 基吉 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 1935, 54, p. 14-26 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/74113 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# 191. 點集合論ニ於ケル類ト測度トノ概念ニ就イテ（I）

近藤基吉 (北大)

類ノ概念ト測度ノ概念トノ類似性ヲ第一類集合ノ有ス.

ル性質ト測度0ノ集合ノ有スル性質トノ類似性ヲ基準トシテ考察シテ見タイト思フ、類ノ概念ニハ空間ニ関スルモノト集合ニ関スル相對概念トガアリ、コレニ對應シテ測度ノ方デハ Lebesgue ノ理論ノ基礎トナル概念ト caratheodory ノ理論ノ根幹ヲナス概念トガ考ヘラレル、從ツテコノ二於イテモ空間ニ関スル場合ト集合ニ関スル場合トヲ分ケテ考ヘル必要ガアル、コヽデハ先ヅ空間ニ関スル概念ノ類似性カラ考察スルコトニシヨウ。

ソコデ類ノ場合ニハ第一類集合ニ相當シ測度ノ場合ニハ測度0ノ集合ニ相當スル ensemble mince ト云フ概念ト ensemble mesurable (B) トイフ概念ノ導入サレタル空間 R ヲ考ヘルコトニスル。

R ニ於イテハ ensemble mince ガ次ノ二ツノ條件

I　R ノ部分集合 E ガ mince ナルトキニハ E ノ凡テノ部分集合ハ又 mince デアル。特ニ空集合ハ mince デアル。

II　R ノ mince ナル部分集合ノ高々可附番個ノ和ハ又 mince デアル。

ヲ滿足スルモノトシテ置ク、尚 R ノ mince ナル部分集合ノ全体カラナル族ヲ $\mathfrak{M}(R)$ 或ハ簡單ニ $\mathfrak{M}$ ニテ示シ R ノ ensemble mesurable (B) ノ全体カラナル族ヲ $\mathfrak{L}(R)$ 或ハ簡單ニ $\mathfrak{L}$ ニテ示スコトニスル。

**Équivalence des ensembles**　ensemble mince

ノ概念ニ依ッテ équivalence ノ概念ヲ導入スル．ソノタメニ R ノ部分集合ノ族 $\mathfrak{M}$ ヲ考ヘル．ソコデ R ノ二ツノ部分集合 E ト F トニ對シテ

$$(M \in \mathfrak{M}) \longrightarrow \{(ME \in m) \backsim (MF \in m)\}$$

ガ成立スルトキニ E ト F トハ $\mathfrak{M}$ ニ關シテ équivalent デアルト云フ．（コヽニ $\longrightarrow$, $\backsim$ ハ夫々命題，inclusion 及ビ équivalence ヲ示ス論理記号デアル、尚 et ト云フ意味ヲ示ス論理記号トシテ & ヲ用フルコトガアル）ソシテコノ事實ヲ

$$E \sim F\ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{M}) \text{ 或ハ } F \sim E\ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{M})$$

ニテ示ス、定義ニヨッテ左ニ 1° $E \sim E\ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{M})$. 2° $(E \sim F(\mathrm{rel}\ \mathfrak{M})) \longrightarrow (F \sim E(\mathrm{rel}\ \mathfrak{M}))$ 3° $\{(E \sim F(\mathrm{rel}\ \mathfrak{M}) \,\&\, (F \sim G(\mathrm{rel}\ \mathfrak{M}))\} \longrightarrow (E \sim G(\mathrm{rel}\ \mathfrak{M}))$ ノ成立スルコトガワカル。特ニ R ノ凡テノ部分集合ノ族 $\gamma$ ニ對シテ $E \sim F\ (\mathrm{rel}\ \gamma)$ ナルトキニ E ト F トハ équivalent デアルト云ヒ $E \sim F$ 或ハ $F \sim E$ ニテ示ス、然ル時ニハ容易ニ次ノ結果ガ導カレル。

1° R ノ部分集合 E ガ mince ナルガタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ $E \sim 0$ ノ成立スルコトデアル。

2° R ノ二ツノ部分集合 E ト F トガ équivalent ナルガタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ $(E+F)-EF \sim 0$ ノ成立スルコトデアル。

## Étendue extérieure et interieure, Propriété de Lebesgue

コノ équivalence ノ概念ニ依ッテ類ノ場合ニハ廣イ意味

デノ Baire ノ性質[1]ニ相當シ測度ノ場合ニハ可測度性ニ相當スル Lebesgue ノ性質ヲ定義スル、ソレニハ先ヅ測度ノ場合ニ於ケル集合ノ等測包及ビ等測核ニ相當スル étendue exterieure 及ビ interieure ノ概念ヲ定義シテ置クノガ便利デアル。類ノ場合ニコレ等ノ概念ニ相當スル概念ハ餘リ用ヒラレナイヤウデアルガ、コレニ依ツテ証明ガ簡單ニナサレル場合ガ多イヤウデアル。ソコデ étendue exterieure 及ビ intérieure ノ定義ヲ與ヘテ置カウ、Rノ部分集合Eニ對シテ

$$E \sim H \ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{L}C)$$

ノ成立スル ensemble mesurable (B) Hガ存在スル時ニHヲEノ étendue exterieure ト云フ（コヽニ $\mathfrak{L}C$ ハ ensemble mesurable (B) ノ補集合ノ全体カラナル族ヲ示ス）E= étendue extérieure ガ存在シ $H_i\ (i=1,2)$ ガEノ étendue exterieure ナルトキニハ $E \sim H_i\ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{L}C)$ $(i=1,2)$ デアルカラ

$$(H_i \in \mathfrak{L}) \rightarrow \{(E-H_i \sim 0) \subset (H_i - H_i \sim 0)\}$$

ニ依ツテ $E-H_i \sim 0$ デアル．然ルニ $E \sim H_j\ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{L}C)$ $(i \neq j)$ デアルカラ

$$(H_i \in \mathfrak{L}) \rightarrow \{(E-H_i \sim 0) \subset (H_j - H_i \sim 0)\}$$

ニ依ツテ $H_j - H_i \sim 0$ デアル．ソレ故ニ $H_i \sim H_j$ デアル、即チEノ étendue extérieure ハ互ニ équivalent デアル、ソコデE, étendue exterieure ノ一ツヲ $\gamma^*(E)=$

テ表ハスコトニシヨウ。然ルトキニEノ任意ノ étendue extérieure ハ $\nu^*(E)$ ト équivalent デアル。

次ニRノ部分集合Eニ対シテ

$$R-E\sim R-H \quad (\text{rel } L)$$

ノ成立スル ensemble mesurable (B) Hガ存在スルトキニHヲEノ étendue intérieure ト云フ。Eノ étendue intérieure ガ存在シテ $H_i$ $(i=1.2)$ ガソノ étendue intérieure ナル時ニハ étendue extérieure ノ場合ト同様ニ $H_1\sim H_2$ ガ得ラレル。ソコデ étendue exterieure ノ場合ト同様ニEノ étendue intérieure ノ一ツヲ $V_*(E)$ ニテ示ス。

ソコデRノ部分集合E=対シテ $\nu^*(E)$, $V_*(E)$ ガ存在シ且ツ $\nu^*(E)\sim V_*(E)$ ガ成立スルトキニEハ Lebesgue ノ性質ヲ有スト云フ、EガLebesgue ノ性質ヲ有ス時ニハ

$$(E+\nu^*(E))-E\nu^*(E)<\{E-\nu^*(E)\}+\{\nu^*(E)-V_*(E)\}+\{V_*(E)-E\}$$

ト $\nu^*(E)\sim V_*(E)$ トニ依ッテ $(E+\nu^*(E))-E\nu^*(E)\sim 0$ デアルソレ故ニ $E\sim\nu^*(E)$ デアル、即チEがLebesgue ノ性質ヲ有ス時ニハEハ ensemble mesurable (B) ノ一ツト équivalent デアル、逆ニEガ ensemble mesurable (B) Hト équivalent ナルトキニハ $E\sim H$ $(\text{rel } \gamma)$ デ且ツ $\gamma$ つ $L_C$ デアルカラ $E\sim H$ $(\text{rel } L_C)$ ニ依ッテ $\nu^*(E)\sim H$ デアリ同様ニシテ $V_*(E)\sim H$ デアルカラコレヨリEがLebesgue ノ性質ヲ有スコトガ分ル、即チ

Théorème 1. Rノ部分集合EガLebesgueノ性質ヲ有スガタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハEトéquivalentナルensemble mesurable (B)ノ存在スルコトデアル。

Opérations de ensembles et la propriété de Lebesgue

Rノ部分集合; étendue extérieure 並ニ intérieure ニ關スル加法並ニ乘法, 定理及ビLebesgueノ性質ヲ有スル集合ノ加法並ビニ乘法ニ關スル定理ヲ証明シテ置ク。

Théorème 2. 1° Rノ部分集合 $E_n$ ($n=1,2,\cdots\cdots$) 及ビ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ ガ étendue extérieure ヲ有スナレバ

(1) $$V^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} V^*(E_n) \quad (\text{rel } \mathfrak{L}_C)$$

ニシテ更ニ $\sum_{n=1}^{\infty} V^*(E_n)$ ガLebesgueノ性質ヲ有スル時ニハ

(2) $$V^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} V^*(E_n)$$

デアル、ソシテ $E_n$ ガLebesgueノ性質ヲ有シ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ ガ étendue intérieure ヲ有ストキニハ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ ハ又Lebesgueノ性質ヲ有ス。

2° Rノ部分集合 $E_n$ ($n=1,2,\cdots\cdots$) 及ビ $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ ガ étendue intérieure ヲ有スナレバ

$$CV_*\left(\prod_{n=1}^{\infty} E_n\right) \sim C\prod_{n=1}^{\infty} V_*(E_n) \quad (\text{rel } \mathfrak{L})$$

ニシテ更ニ $\prod_{n=1}^{\infty} V_*(E_n)$ ガLebesgueノ性質ヲ有スルトキニハ

$$V_*\left(\prod_{n=1}^{\infty} E_n\right) \sim \prod_{n=1}^{\infty} V_*(E_n)$$

デアル、ソシテ $E_n$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ が Lebesgue ノ性質ヲ有シ $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ が étendue extérieure ヲ有スルトキハ $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ ハ又 Lebesgue ノ性質ヲ有ス。

証明. 2° ハ 1° ト同様ニ証明セラレルカラ 1° ノミヲ証明スル。

先ヅ (1) ノ証明カラ始メル、R ノ ensemble mesurable (B) H ニ対シテ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n - H \sim 0$ ナレバ $E_n - H \sim 0$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ デアルカラ $E_n \sim r^*(E_n)$ $(\mathrm{rel}\ \mathfrak{L}c)$ ニ依ッテ $r^*(E_n) - H \sim 0$ $(n=1,2,\cdots)$ デアル、ソレ故ニ $\sum_{n=1}^{\infty} r^*(E_n) - H \sim 0$ デアル、即チ

$$(3)\quad \left\{(H \in \mathfrak{L}) \,\&\, \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n - H \sim 0\right)\right\} \rightarrow \left\{\sum_{n=1}^{\infty} r^*(E_n) - H \sim 0\right\}$$

デアル。次ニ ensemble mesurable (B) H ニ対シテ $\sum_{n=1}^{\infty} r^*(E_n) - H \sim 0$ ナレバ $r^*(E_n) - H \sim 0$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ デアルカラ $r^*(E_n) \sim E_n (\mathrm{rel}\ \mathfrak{L}c)$ ニ依ッテ $E_n - H \sim 0$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ デアル、ソレ故ニ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n - H \sim 0$ デアル、即チ

$$(4)\quad \left\{(H \in \mathfrak{L}) \,\&\, \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^*(E_n) - H \sim 0\right)\right\} \rightarrow \left\{\sum_{n=1}^{\infty} E_n - H \sim 0\right\}$$

デアル、ソレ故ニ (3), (4) ニ依ッテ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} r^*(E_n)\ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{L}c)$ ガ得ラレル、然ルニ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n \sim r^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)\ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{L}c)$ デアルカラコノ二式ヨリ (1) ガ得ラレル。

次ニ $\sum_{n=1}^{\infty} r^*(E_n)$ ガ Lebesgue ノ性質ヲ有スルトキハ $\sum_{n=1}^{\infty} r^*(E_n) \sim H$ ノ成立スル ensemble mesurable (B) H ガ存在スル、コノ H ニ対シテ $H \sim r^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)\ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{L}c)$ デアルカラ、又

$H \sim V^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ デアル、ソレ故ニ $H$ ノ定義カラ (2) ガ得ラレル。

最後ニ $E_n (n=1, 2, \cdots\cdots)$ ガ Lebesgue ノ性質ヲ有スルトキニ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ ガ étendue intérieure ヲ有スナレバ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ ハ又 Lebesgue ノ性質ヲ有スコトヲ証明スル。$E_n$ ハ Lebesgue ノ性質ヲ有スカラ $E_n \sim H_n (n=1,2,\cdots\cdots)$ ノ成立スル ensemble mesurable (B) $H_n$ ガ存在スル。$H_n$ ニ對シテ $H_n - E_n \sim 0$ デアルカラ $H_n - \sum_{k=1}^{\infty} E_n \sim 0$ デアル、然ルニ $V^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ ノ定義カラ $C\sum_{n=1}^{\infty} E_n \sim CV_*\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) (\text{rel } L)$ デアルカラ $H_n - V_*\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) \sim 0$ ガ成立スル。從ツテ $E_n - V_*\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) \sim 0$ デアル、コレヨリ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n - V_*\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) \sim 0$ ガ得ラレル、他方ニテ étendue intérieure ノ性質カラ $V_*\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) - \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sim 0$ デアル、ソレ故ニ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ ハ $V_*\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ ト équivalent デアル、即チ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ ハ Lebesgue ノ性質ヲ有ス。 Q. E. D.

コノ Théorème ニ依ツテ分ルコトハ R ノ凡テノ sous-ensemble ガソノ étendue extérieure 及ビ intérieure ヲ有スナレバ R ニ含マレ且ツ Lebesgue ノ性質ヲ有スル集合ノ高々可附番個ノ和及ビ積ガ Lebesgue ノ性質ヲ有スコトデアル、然シコノ場合ニハ更ニ精密ナ結果ヲ導クコトガ出來ル。

Théorème 3. R ノ凡テノ部分集合ガ étendue extérieure 及ビ intérieure ヲ有スナレバ R ノ Lebesgue ノ性質ヲ

有スル集合カラナル sonslin 族 $\{E_{n_1 n_2 \cdots n_K}\}$ $(K, n_K = 1,2,\cdots)$ ノ核

$$E = \sum \prod_{K=1}^{\infty} E_{n_1 n_2 \cdots n_K}$$

ハ又 Lebesgue ノ性質ヲ有ス。

証明. R ノ Lebesgue ノ性質ヲ有スル部分集合ノ高々可附番個ノ和及ビ積ハ又 Lebesgue ノ性質ヲ有スカラ

$$E_{n_1 n_2 \cdots n_K} \supset E_{n_1 n_2 \cdots n_K n_{K+1}}$$

ト假定スルモ一般性ヲ失ハズ、コンデ

$$Z_{m_1 m_2 \cdots m_e} = \sum \prod_{K=1}^{\infty} E_{m_1 m_2 \cdots m_e n_1 \cdots n_K}$$

ト置ケバ明カニ

(1) $Z_{m_1 m_2 \cdots m_e} \subset E_{m_1 \cdots m_e}$

(2) $Z_{m_1 \cdots m_e} = \sum_{n=1}^{\infty} Z_{m_1 \cdots m_e n}$

$$Z \equiv \sum \prod_{K=1}^{\infty} Z_{n_1 \cdots n_K} = E$$

デアル、扨テ $E_{m_1 \cdots m_e}$ ハ Lebesgue ノ性質ヲ有シ(1)ガ成立スル故ニ

$$\nu^*(Z_{m_1 \cdots m_l}) - E_{m_1 \cdots m_l} \sim 0$$

デアル、ソレ故ニ

$$\nu^*(Z_{m_1 \cdots m_l})(E_{m_1 \cdots m_l} + T_{m_1 \cdots m_l}$$

ノ成立スル ensemble mince $T_{m_1 \cdots m_l}$ ガ存在スル、今コンデ

$$T = \sum T_{m_1 \cdots m_l}$$

トスレバ $\Psi m_1 \cdots m_l$ ハ mince ニシテ且ツ

$$\nu^*(Z m_1 \cdots m_l)(E m_1 \cdots m_l + \Psi)$$

デアル、ソレ故ニ

$$K \equiv \Sigma \prod_{l=1}^{\infty} \nu^*(Z m_1 \cdots m_l)(E + \Psi)$$

デアル、従ッテ $K - E \sim 0$ デアル、次ニ(2)ニ依ッテ

$$\nu^*(Z m_1 \cdots m_l) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(Z m_1 \cdots m_l n)$$

或ハ $\quad \nu^*(Z m_1 \cdots m_l) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(Z m_1 \cdots m_l n) \sim 0$

デアル、同様ニ $E = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ カテ $\nu^*(E) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(Z_n) \sim 0$ デアル。

然ルニ

$$\nu^*(E) - K < \nu^*(E) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n) + \Sigma \left\{ \nu^*(Z m_1 \cdots m_l) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(Z m_1 \cdots m_l n) \right\}$$

デアルカラ $\nu^*(E) - K \sim 0$ デアル、ソレ故ニコレト $K - E \sim 0$ トカラ $\nu^*(E) - E \sim 0$ デアル、他方ニテ $E - \nu^*(E) \sim 0$ デアルカラ $E \sim \nu^*(E)$ デアル、即チ E ハ Lebesgue ノ性質ヲ有ス。

Q. E. D.

**Espace de classe (S*)** I. II ヲ満足スル ensemble mince 及ビ ensemble mesurable (B) ノ定義セラレタル空間 R ノ中デ

III R ノ凡テノ部分集合ハ étendue extérieure 及ビ intérieure ヲ有ス。

Ⅳ　R ノ ensemble mesurable (B) ノ補集合ハ又
Lebesgue ノ性質ヲ有ス。

ヲ満足スルモノヲ ($S^*$) 型ノ空間ト名付ケル。

Théorème 4.　Ⅰ, Ⅱ ヲ満足スルマヲナ ensemble mince 及ビ ensemble mesurable (B) ノ定義サレタル空間Rが ($S^*$) 型メルガタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ

(A)　R ノ任意ノ部分集合Eニ對シテ E～H (rel L) ノ成立スル ensemble mesurable (B) H が存在スル。

(B)　R 及ビ R ノ ensemble mesurable (B) ノ有限個ノ和ハ Lebesgue ノ性質ヲ有ス。

ノ成立スルコトデアル。

証明　十分條件ナルコト、R ノ部分集合Eニ對シテ E～H (rel L) ノ成立スル ensemble mesurable (B) H ノ一ツヲ $\mu(E)$ ニテ示ス。然ルトキニ E～H (rel L) ノ成立スル任意ノ ensemble mesurable (B) H ニ對シテ $\mu(E)$～H デアル、即チ $H\mu(R-H)$～0 デアルカラ H～$\mu(E)$ (rel L) ニ依ッテ $\mu(E)\,\mu(R-H)$～C デアル、ソレ故ニ $\mu(E)-H$～C デアル。

同様ニシテ $H-\mu(E)$～0 ガ得ラレ $\mu(E)$～H ガ証明セラレル。

ソコデ先ヅ R ノ部分集合Eニ對シテ $\mu(E)$ ガ E ノ étendue extérieure ナルコト、即チ E～$\mu(E)$ (rel Lc) ナルコトヲ証明スル。

i) $\{M\in\mathfrak{L})\,\&\,(E-M\sim 0)\}$ ナルトキ、M ハ ensemble mesurable (B) デアルカラ $M\mu(R-M)\sim 0$ デアル．然ルニ $E-M\sim 0$ デアルカラ $E\mu(R-M)\sim 0$ ニ依ッテ $\mu(E)\mu(R-M)\sim 0$ デアル、コレヨリ $\mu(E)(R-M)\sim 0$ ガ得ラレル、即チ

$$\{(M\in\mathfrak{L})\,\&\,(E-M\sim 0)\}\rightarrow\{\mu(E)-M\sim 0\}$$

デアル。

ii) $\{M\in\mathfrak{L})\,\&\,(\mu(E)-M\sim 0)\}$ ナルトキ先ガ $M+\mu(R-M)\sim R$ ナルコトヲ証明スル。$M+\mu(R-M)$ ガ Lebesgue ノ性質ヲ有シ $R\sim\mu(R)$ デアルカラ $M+\mu(R-M)\sim R\,(\mathrm{rel}\,\mathfrak{L})$ ナルコトヲ示セバ十分デアル．$\{(N\in\mathfrak{L})\,\&\,(N(M+\mu(R-M))\sim 0)\}$ ノ時ニハ $NM\sim 0$ デ且ツ $N\mu(R-M)\sim 0$ デアルカラ $N(R-M)\sim 0$ ヨリ $NR\sim 0$ デアル。又 $\{(N\in\mathfrak{L})\,\&\,(NR\sim 0)\}$ ノトキニハ明カニ $N(M+\mu(R-M))\sim 0$ デアル。ソレ故ニ $M+\mu(R-M)\sim R$ ガ成立スル、扨テ $\mu(E)(R-M)\sim 0$ デアルカラ $\mu(E)\mu(R-M)\sim 0$ ニ依ッテ $E\mu(R-M)\sim 0$ デアル、然ルニ $M+\mu(R-M)\sim R$ デアルカラ $EM\sim M$ 或ハ $E-M\sim 0$ デアル、即チ

$$\{(M\in\mathfrak{L})\,\&\,(\mu(E)-M\sim 0)\}\rightarrow\{E-M\sim 0\}$$

デアル、ソレ故ニ i) ii) ヨリ $E\sim\mu(E)\,(\mathrm{rel}\,\mathfrak{L}c)$ ガ得ラレル．次ニ R ノ部分集合 E が Lebesgue ノ性質ヲ有ス時ニ R−E モ亦 Lebesgue ノ性質ヲ有スコトヲ示ス、E ハ ensemble mesurable (B) ノ一ツト équivalent デアルカラ E ガ mesurable (B) ナルトキヲ考フレバ十分デアル、然ル時ニハ $E+\mu(R-E)\sim R$ デ $E\mu(R-E)\sim 0$ デアルカラ $\mu(R-E)\sim R-E$

=依ッテ R−E ハ Lebesgue ノ性質ヲ有ス。最後ニ R ノ部分集合 E ハ étendue intérieure ヲ有スコトヲ示ス。

R−μ(R−E) ハ Lebesgue ノ性質ヲ有スカラ R−μ(R−E)∼H ノ成立スル ensemble mesurable (B) H ガ存在スル。今 H ガ E ノ étendue intérieure ナルコトヲ証明シヨウ、{(M∈L)&(M−E∼0)} ノトキニハ Mμ(R−E)∼0 デアルカラ H∼R−μ(R−E) ニ依ッテ MH∼M 或ハ M−H∼0 デアル。{(M∈L)&(M−H∼0)} ノ時ニハ H∼R−μ(R−E) ニ依ッテ M∼MH∼M−Mμ(R−E) デアル、ソレ故ニ Mμ(R−E)∼0 デアル、コレヨリ M−E∼0 ガ得ラレルカラ R−E∼R−H (rel L) デアル、従ッテ H ハ E ノ étendue intérieure デアル。必要条件ナルコト自明デアル。 Q.E.D.

(附註)

(1) 直線 L ノ部分集合 E ガ L ニ於テ広イ意味デ Baire ノ性質ヲ有スト云フノハ E ニ対シテ (E+H)−EH ガ L ニ於テ第一類集合デアルヤウナ ensemble mesurable (B) H ガ存在スルコトデアル。