



Title	Wohlordnungssatz ノー証明
Author(s)	黒田, 成勝
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 55, p. 1-4
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74114
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

192. Wohlordnungssatz / 一証明

黒田 茂勝 (東京女高師)

集合論ヲ *axiomatisch* = 組立テル場合 = 次ノ公理ガ必要デアル。

I. Fraenkel-v. Neumann / Ersetzungssaxiom.

m ヲ既知ノ集合、 φ ヲ既知ノ函数トスル、ソノトキ $x \in m$ ナラ $\varphi(x)$ ガ又集合又ハ集合ノ元デアルトスル、然ラバ凡テノ $\varphi(x)$, $x \in m$, ヲ元トスル集合が存在スル。

ソノ集合ヲ $\mathfrak{M}(\varphi(x); x \in m)$ ト記ス。

コニテ函数ノ定義々、集合論ノ他ノ公理ヲ擧ゲル必要ガナイノデ、唯集合論ノ公理カラ証明サレル次ノ定理ヲ承認スルコト=シマス。

II. ξ ガ順序数デアルトキ、 ξ ヨリ小サイ凡テノ順序数ヲ元トスル集合が存在スル、ソレヲ W_ξ ト記ス。

III. φ ヲ既知ノ函数トスル、但ソノ *Argument* モ、ソノ函数ノ値モ集合又ハ集合ノ元デアルトスル、ソノトキ任意ノ順序数 ξ = 對シテ

$$f(\xi) = \varphi(\mathfrak{M}(f(\eta); \eta \in W_\xi))$$

ヲ満足スル函数 f ハ一意ニ可能デアル (函数ノ帰納的定義——v. Neumann³⁾)。

IV. 凡テノ順序数ヲ元トスル集合ハ存在シナシ (Rurali-Forti).

以上ノコトカラ Zermeloノ整列可能定理ヲ証明シマス。

勿論撰出原理¹⁾、集合論、他、公理²⁾ハ自由ニ使用シマス。

m ヲ任意ノ集合トスル、 $\mathcal{U}(m)$ ¹⁾ノ撰出函数ヲ $\alpha(x)$,
 $0 < x \leq m$, トスル²⁾ 又 $\alpha(0) = 0$ トスル。然ラバ III = ヨ
ツテ 順序数ノ領域ニ於テ 函数

$$(1) \quad f(\xi) = \alpha(m - \mathcal{M}(f(\eta); \eta \in W_\xi))$$

ガ 決定 サレル、ソノ トキ

$$(2) \quad \zeta < \xi, \quad (\zeta, \xi \text{ 順序数})$$

$$(3) \quad m - \mathcal{M}(f(\eta); \eta \in W_\xi) \neq 0$$

ナラバ

$$(4) \quad f(\zeta) \neq f(\xi), \quad f(\zeta) \in m, \quad f(\xi) \in m$$

デアル、ナゼナラ (2) = ヨツテ $\zeta \in W_\xi$. 故ニ

$$f(\zeta) \in \mathcal{M}(f(\eta); \eta \in W_\xi),$$

$$(5) \quad f(\zeta) \notin m - \mathcal{M}(f(\eta); \eta \in W_\xi)$$

又 (3) = ヨツテ (1) カラ

$$(6) \quad f(\xi) \in m - \mathcal{M}(f(\eta); \eta \in W_\xi).$$

故ニ (5), (6) カラ $f(\zeta) \neq f(\xi)$ ガ 得 ラ レル。 (6) カラ $f(\xi) \in m$,

又

$$m - \mathcal{M}(f(\eta); \eta \in W_\xi) \subset m - \mathcal{M}(f(\eta); \eta \in W_\zeta) \neq 0$$

デアルカラ $f(\zeta) \in m$.

從ツテ 今凡テノ 順序数 ξ = 對シテ (3) ガ 成立 シタ 假定 ス
レバ、上記 f = ヨツテ、 m 或ハ ソノ 部分集合 = 順序数ノ 全体

1) m ノ 中 集合

2) 0 ハ 空 集合.

が一對一 = 對應スルコト = ナルカラ、 $I = \omega$ ツテ凡テノ順序数ヲ元トスル集合が存在スルコト = ナリ、ソレハ IV. = 反スル、故 = (3) ヲ成立セシメナイ順序数 ξ ガアル、ソノ最小數ヲ μ トスル。

然ラバ

$$m - \text{mc}(f(\eta); \eta \in W_\mu) = 0$$

$$(7) \quad m = \text{mc}(f(\eta); \eta \in W_\mu).$$

ソシテ $\zeta < \mu$, $\xi < \mu$, $\zeta \neq \xi$ トスレバ μ ノ最小性 = ω ツテ ξ 及ビ ζ = 同シテ (3) ガ成立スルカラ、上記ト同様 = $f(\zeta) \neq f(\xi)$.

從ツテ (7) ハ m ト W_μ トが一對一 = 對應スルコトヲ示ス、ソツテ W_μ ハ整列集合デアレカラ、コノ對應 = ω ツテ m モ亦整列サレル。

附記： 凡テノ順序数ノ領域ガ集合デアルト考ヘルト逆理トナリ、ソレガ集合デナイト云フ定理ヲ使用スルト整列可能定理ハ上述ノヤウニ簡單ニ証明サレル、長イ間逆理デアツタ Burali-Forti ヲ使フノハ氣ガヒケルケレドモ、公理カラ出ルモノヲ使ツテ悪イ害ハナイ、整列可能定理ト Burali-Forti トハ密接ニ關係ガアル。⁴⁾

Zermelo ノ兩証明ハ *Ersetzungsaxiom* ガ集合論 = 這

3) J.V. Neumann: über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre. Math. Ann. 99. (1928)

4) 高木: 過渡期ノ数学(近刊), 集合論ト数学基礎論ノ項参照。

入ル以前ノ証明デアルガ、 *Ersetzungsaxiom* $\Rightarrow$ V. *New-*
*mann*³⁾ノ意味ニ於テ假定スルノナラ、 *Wohlordnungs-*
*atz*ノ証明ハ上記ノ如クデヨイト思ヒマス。