OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	函數方程式　f（f(x)）=F(x) ニ就テ
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 57, p. 1-5
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74119
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

197. 函數方程式 $f(f(x))=F(x)$ ニ就テ

南雲道夫（阪大）

"$F(x)$ ヲ既知函數，$f(x)$ ヲ未知函數トシテ函數方程式

$$f(f(x))=F(x),\qquad f(f(f(x)))=F(x),$$ 等々ノ一般解ヲ求ム" トイフ問題ハ $F(x)$ ヤ $f(x)$ ニ関スル假定ノ如何ニヨツテ非常ニムツカシイ問題ニ思ハレル。

次ニ實変數ノ場合ニツイテ，$F(x)$ ガ $a\leqq x\leqq b$ デ連続，純單調增加 且ツ

$$F(a)=a,\qquad F(b)=b$$

（$a=-\infty$，又 $b=+\infty$ デモヨイ）ト假定スル。此ノ假定ノ下ニ $a\leqq x\leqq b$ ニ於テ純單調增加連続デ $f(a)=a$，$f(b)=b$ ナル $f(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。

I. $F(x)$ ニ関スル上ノ假定ニヨリ $x'=F(x)$ ナル変換 $x\longleftrightarrow x'$ ハ區間 $a\leqq x\leqq b$ ヲソ自分自身ヘ一對一且ツ連続ニ寫像スル．$x'=f(x)$ ナル変換モ同様デアル。

今區間 (a,b) 内デ特ニ寫像 $x'=F(x)$ ノ不動点［$x=f(x)$ ナル点］ノ全体ヲ除ケバ、有限個乃至可附番個ノ區間ガ残ル。ソノ任意ノ一ツヲ (α,β) トスレバ，(α,β) ハ $x'=F(x)$ ニヨツテ (α,β) 自身ニ一對一連続ニ寫像サレ，且ツ不動点ヲ含マナイ。

區間 (α,β) ヲソレ自身ニ一對一連続デ且ツ不動点ヲ含

マヌ寫像ハ直線全体ノ上ノ点ノ Translation（移動）ト Topologisch isomorph（位相幾何學的＝同型）デアル。即チ次ノ函數方程式

$$\boxed{\varphi(t+1)=F(\varphi(t))}$$

ガ $(-\infty, \infty)$ ニ於テ純單調增加連續函數 $x=\varphi(t)$

$\left[\lim_{t=-\infty}\varphi(t)=\alpha,\quad \lim_{t=+\infty}\varphi(t)=\beta\right]$ ヲ解トシテ

有スル［$x=\varphi(t)$ ハ全直線 $(-\infty, +\infty)$ ヲ區間 (α, β) ニ寫像スル］

何トナレバ x_0 ヲ (α, β) 内ノ任意ノ一点トシ

$$F(x_{n-1})=x_n$$

ニヨリ順次ニ $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots\cdots$ ヲ，又逆ニ $x_{-1}, x_{-2}, \cdots\cdots\cdots$ ヲ順次ニ定義スレバ（$F(x)>x$ ト假定スレバ）

$$\alpha < x_{n-1} < x_n < \beta$$

ヲ得ル。（$F(x)$ ノ純單調性ニヨル）

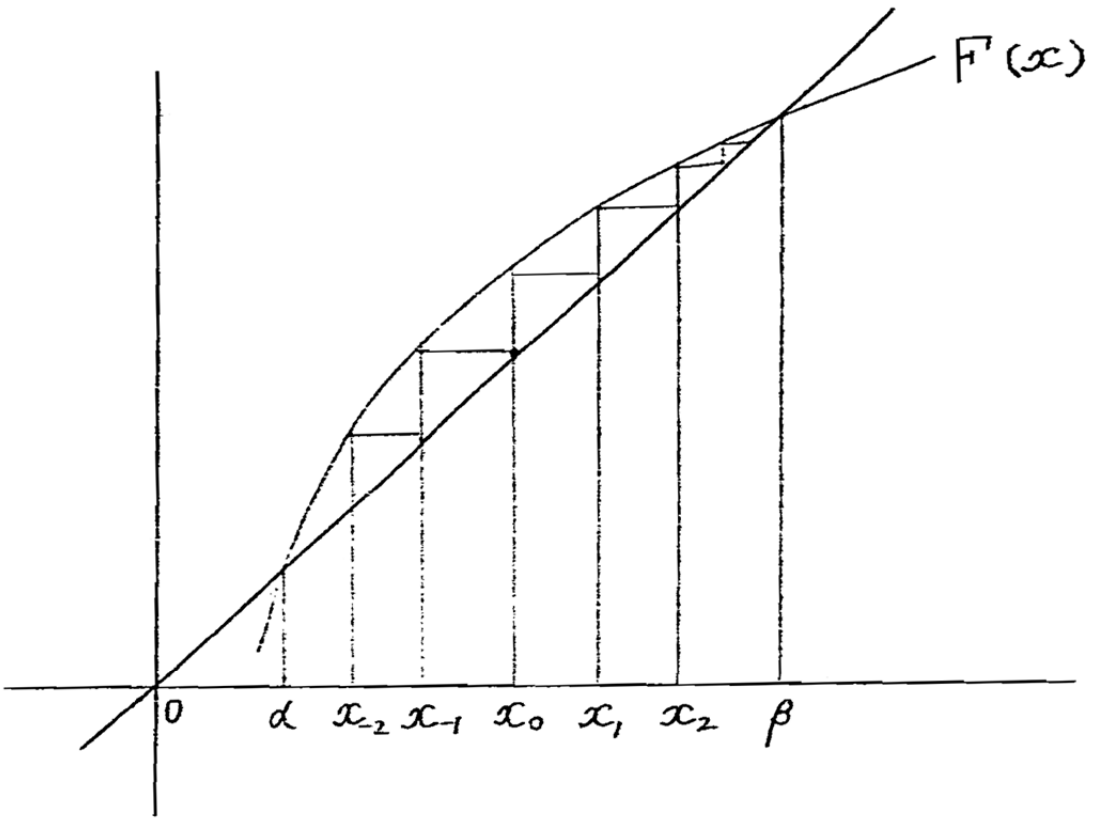
ソレカラ閉區間 $[x_{n-1}, x_n]$ ハ寫像 $x'=F(x)$ ニヨリ、丁度隣リノ區間 $[x_n, x_{n+1}]$ ニ一對一連續ニ寫像サレル。

今 $\varphi(t)$ ヲバ

$$\varphi(0)=x_0$$

$$\varphi(1)=x_1$$

トシ，$0 \leqq t \leqq 1$ デ純單調增加連續函數（但シ任意）トスレバ



$$\varphi(t+1)=F(\varphi(t))$$

ニヨリ、順次ニ $1\leqq t\leqq 2$, $2\leqq t\leqq 3$, ----------,

$n-1\leqq t\leqq n$ ニ於ケル $\varphi(t)$ ガ自然ニ一義的ニ決定サレル。($-1\leqq t\leqq 0$, $-2\leqq t\leqq -1$, ---------- モ同様) カクシテ得ラレタ $\varphi(t)$ ハ求ムル性質ヲ具ヘテヰル。

II. サテ $f(x)$ ヲバ (α,β) ニ於テ ($F(x)$ ト x ナル所)

$$f(x)=\varphi\left(\varphi^{-1}(x)+\frac{1}{h}\right)$$

(h ハ自然数) トシ、$F(x)=x$ ナル点デハ

$$f(x)=x$$

ト定義スレバ、$f(x)$ ハ $a\leqq x\leqq b$ デ純単調増加連続デ

$$f(a)=a,\quad f(b)=b$$

且ツ $\underbrace{f(f(\cdots\cdots(f(x))\cdots\cdots))}_{h\text{回}}=F(x)$

トナル $\left[\varphi(\varphi^{-1}(x)+1)=F(x)\right.$ ヨル$\left.\right]$

以上ノ形ノ解ガ問題ノ條件ノ下ニ於テ一般解ナルコトハ次ノヤウニシテワカル。

$f(x)=x'$ ナル寫像ノ不動点ハ、$f(x)=x'$ ヲ繰返シテ得ラレル $F(x)=x'$ ノ不動点デアル。又 $f(x)=x'$ ノ相隣ルニツノ不動点 α,β ノ間デハ常ニ $f(x)>x$ 又ハ $f(x)<x$ ナルニヨリ、常ニ $F(x)>x$ 又ハ $F(x)<x$ デナケレバナラヌ。

故ニ (α,β) ニ於テ、前ト同様ニ

$$\psi\left(t+\frac{1}{k}\right)=f\left(\psi(t)\right)$$

ヲ満足スル $(-\infty,+\infty)$ デ純單調増加ノ一意函數 $\psi(t)\left\{\psi(-\infty)=\alpha,\ \psi(+\infty)=\beta\right\}$ ガ得ラレル、故ニ (α,β) デ

$$f(x)=\psi\left(\psi^{-1}(x)+\frac{1}{k}\right)$$

從ッテ之ヲ k 回繰返シテ

$$F(x)=\psi\left(\psi^{-1}(x)+1\right)$$

$x=\psi(t)$ トオイテ

$$\psi(t+1)=F\left(\psi(t)\right)$$

即チ $f(x)$ ニ與ヘラレタ條件ノ下ニ於テ一般解デアル。

以上ノ方法ノ根本ハ區間ノ不動点ノナイ自己寫像ハ全直線ノ Translation ト位相幾何學的ニ同型デアルトイフ考ヘニ歸スルノデアル。

上ノ方法ニヨレバ

$$f(x, \theta) = x',$$

[但シ $f(x,\theta) = \varphi(\varphi^{-1}(x)+\theta)$], ハ θ ヲ ぱらめた一トスル additive ナ連続群ヲ作ル。

茲デハ実変数ノ場合ノミヲ考察シタガ、複素函数論的ニ考察スレバ可ナリ趣キノ異ッタ結果ガ得ラレル様ナ氣ガスル。

——(以 上)——