OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | 連續ナ環ニ於ケル群 Gs·Gt=Gs+t ニツイテ |
| Author(s) | 南雲, 道夫 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 1935, 58, p. 9-16 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/74125 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# 203. 連續ナ環ニ於ケル群 $G_s \cdot G_t = G_{s+t}$ ニツイテ

南雲道夫 (阪大)

角谷君ノ問題 (昨日、即チ九月十一日ノ會話デ)

"$\int_0^1 K(x,u;s)K(u,y;t)du = K(x,y;s+t)$ ナル $K(x,y;s)$ ヲ求ム" ト云フ問題ヲ次ニ一般的ナ連續ナ環 (Ring) ニ於テ解クノガ主眼デアル。

$0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ ニ於ケル連續函數 $K(x,y)$ ノ集合ハ

$$\int_0^1 K_1(x,u)K_2(u,y)du = K_3(x,y)$$

ヲ以テ $K_1, K_2$ ノ積トスルトキ、連續ナ Ring ヲ作ル。又一般ノ線狀空間ニ於ケル連續ナ一次變換モ連續ナ Ring ヲ作ル (連續ナ Ring ノ定義ハ次ニ述ベル)

一般ニカカル Ring ニ於ケル One parameter 群

$$G_s \cdot G_t = G_{s+t}$$

[$s, t$ ハ ぱらめた—] ヲ見出スノガ茲ノ問題デアル。

## I 連續ナ環ノ定義

$\mathfrak{R}$ ハ次ノ性質ヲ有スル要素ノ集合デアルトキ連續ナ Ring ト云フ。

1. $\mathfrak{R}$ ノ要素ハ加法群ヲ作ル。即チ

$$(A \in \mathfrak{R},\ B \in \mathfrak{R}) \longrightarrow A+B=C \in \mathfrak{R}$$

且ツ A+B ナル結合ニツイテ可換群ヲナス。

2. 積が定義サレテヰル。

$$(A\in\mathfrak{R},\ B\in\mathfrak{R})\longrightarrow A\cdot B=C\in\mathfrak{R}$$

積ハ組合セノ法則

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$

及分配ノ法則ニ従フ.

$$(A+B)\cdot C=AC+BC$$

$$A\cdot(B+C)=AB+AC$$

3. 實數ノ集合ヲ Operator トシテ有スル。α任意ノ實數トスルトキ $A\in\mathfrak{R}\longrightarrow aA\in\mathfrak{R}$

$$a(a'A)=(aa')A$$

$$(a+a')A=aA+a'A$$

$$a(A+B)=aA+aB$$

$$(aA)B=A(aB)$$

$$1A=A,\quad 0A=0$$

4. 絶對値が定義サレテヰル.

$$|A|\geqq 0\quad(\text{實數})$$

(4.1) $A\neq 0\longrightarrow |A|>0$

(4.2) $|A+B|\leqq |A|+|B|$

(4.3) $|aA|=|a||A|$

(4.4) $|A\cdot B|\leqq |A|\cdot|B|$

5. 絶對値ヨリ距離 $|A-B|$ が定義サレ、從ツテ極限が普通ノトホリニ定義サレル。

$\mathfrak{R}$ ハ完全ナ距離空間ヲナス、即チ $\varepsilon$ ヲ任意ノ正ノ数トスル時，$n, n' > N_\varepsilon$ ナラバ

$$|A_{n'} - A_n| < \varepsilon$$

ナル様ナ自然数 $N_\varepsilon$ が存在スレバ，$\lim_{n\to\infty} A_n$ が $\mathfrak{R}$ ニ存在スル。

以上ノ性質ヲ全部具ヘタ場合ニ $\mathfrak{R}$ ヲ連続ナ環ト名付ヨウ。

1.2.3. ノ成立ハ具体的ナ例ニ於テ成立スルコトハ容易ニ分ル。

4. ノ性質ハ $\int_G K_1(x,u)K_2(u,y)du = K_3(x,y)$ ノ場合ニハ

($\alpha$) $\quad |K| = m(G)\cdot \mathrm{Max}|K(x,y)|$

(但シ $m(G)$ ハ領域 $G$ ノ測度) トスルカ，又ハ

($\beta$) $\quad |K| = \left(\iint_{GG} |K(x,y)|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$

トスレバヨイ。

又線状空間ニ於ケル一次変換ノ場合ニハ

$$|A| = \frac{|A\gamma|}{|\gamma|} \text{ ノ上限}$$

トスレバヨイ。

5. ノ性質ハ ($\alpha$) デハ一様収斂ニヨリ $\mathfrak{R}$ ガ連続函数全体ヨリ成リ $m(G)$ ガ有限ナラバ成立．($\beta$) デハ Riesz-Fischer ノ定理ニヨリ $\iint K^2 dxdy$ 有限ナル $K(x,y)$ 全体カラ $\mathfrak{R}$ ガ出来テヰレバヨイ。

又線狀空間が完全デアレバ之レニ属スル連続ナル一次変換ノ全体 $\mathfrak{R}$ ハ又完全デアル。

## II 準備

$\mathfrak{R}$ ノ要素が實変数 $t$ ノ連続函数 $A(t)$ ナルトキ，之ヲ $t$ デ積分スルコトが出來ル。

$$\int_0^S A(t)\,dt = B(s)$$

積分ノ定義ハ Riemann 積分ト同様デアル。［收斂ハ Cauchy ノ條件ニヨル］ 又微分モ普通ノ場合ト同様ニ定義出來ル。

ソコデ $\int_0^S A(t)\,dt$ ハ $S$ ニツキ一様ニ微分出來ル、シカシテ

$$\frac{d}{dS}\int_0^S A(t)\,dt = A(S)$$

又 $B(s)$ が $S$ ニツキ一様ニ微分出來テ $\frac{dB(s)}{ds} = A(S)$ ナラバ $\int_\alpha^\beta A(t)\,dt = A(\beta) - A(\alpha)$

和ヤ積ニ関シテハ普通ノ場合ト同様ナ方法が用ヒラレル。ソレ々之ヲ述ベルノハ略スル。

$\mathfrak{R}$ ニハ一般ニハ單位 $\mathbb{1}$ が存在シナイ。〔$\mathbb{1}$ ハ次ノ性質ヲ有ス。 $\mathbb{1}A = A\mathbb{1} = A$

$|\mathbb{1}| = 1$

然シ $\mathfrak{A}$ = $\mathbb{1}$ ガ存在セヌトキ = ハ之ヲ附ケ加ヘルコトガ出来ル。

絶對値ハ $|a\mathbb{1}+A|=|a|+|A|$ トスレバヨイ。

$\mathbb{1}$ ヲ附ケ加ヘヌ $\mathfrak{A}$ ヲ $\mathfrak{A}_1$ デ示ス。$\mathfrak{A}_1$ = 於テ

$|A-\mathbb{1}|<1$ ナラバ

$$A'A=AA'=\mathbb{1}$$

ナル $A'$ ガ存在スル（一義的）。ソレ=ハ $A-\mathbb{1}=B$ トシテ

$$A'=\mathbb{1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n B^n \qquad (\text{收斂ス!})$$

トオケバヨイ。之ヲ $A^{-1}$ デ示ス。

## III. 本論

$\mathfrak{A}$ ノ要素 $G(t)$ ガ實変數 $t$ $(-\infty<t<+\infty)$ ノ連続ナ函數ヲナシテ丼テ $t$ = ツイテ加法群，即チ

$$G(t)\,G(s)=G(s+t)$$

ナルモノトシ、カヽル $G(t)$ ノ一般ノ形ヲ求メヨウ。

特= $G(0)=A$ ト置ケバ

$$\begin{cases} AG(t)=G(t)A=G(t) \\ A^2=A \end{cases}$$

$A$ ガ單位 $\mathbb{1}$ デアレバソノマヽ，$\mathbb{1}$ デナケレバ $\mathfrak{A}_1$ = 於イテ $\mathbb{1}-A=\bar{A}$ トオケバ，容易=

$$\bar{A}^2=\bar{A},$$

$$\bar{A}G(t)=G(t)\bar{A}=0.$$

ソコデ　$\overline{A}+G(t)=H(t)$　トオケバ，容易＝

$$H(s)H(t)=H(t+s),$$

$$H(0)=\mathbb{1}.$$

$H(t)$ ハ勿論連続デアル．次＝ $H(t)$ ノ群ヲ考ヘル

$$\int_0^s H(t)\,dt=H^*(s)$$　トオケバ容易＝

$$H^*(s)H(t)=H^*(t+s)-H^*(s).$$

$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}H^*(s)=H(0)=\mathbb{1}$ ナル＝ヨリ，$s$ ノ充分小ナル時

＝ハ，$H^{*-1}(s)$ ガ存在スル。

故＝　$$H(t)=H^{*-1}(s)\left\{H^*(t+s)-H^*(s)\right\}.$$

右辺ハ $t$＝ツキー様＝微分可能デアル．故＝ $H(t)$ ハ一様＝微分可能デナケレバナラヌ（$t$ ノ任意ノ開区間デ！）．

ソコデ　$H(s)H(t)=H(s+t)$ ヲ $s$ デ微分スレバ

$$H'(s)H(t)=H'(s+t)$$

$s=0$，$H'(0)=B$ トオケバ

$$\frac{dH(t)}{dt}=BH(t)$$

故＝

$$H(t)=\mathbb{1}+B\int_0^t H(u)\,du$$

之ハ Lipschitz ノ條件ノ成立シテヰル場合ノ Picard ノ逐次反覆法＝ヨル方法ト全ク同様ノ方法デ解ケル。

ソノ結果ハ

$$H(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B^n}{n!}t^n \quad (\text{一様ニ収斂ス!})$$

元ノ群 $G(t)$ ニモドルニハ

$$AH(t)=H(t)A=AH(t)A=G(t)$$

$(A\bar{A}=\bar{A}A=0)$ ナルニヨリ，$ABA=C$ トスレバ

$$G(t)=A+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C^n}{n!}t^n$$

ヲ得ル。 $A$ ハ $A^2=A$，$C$ ハ $AC=CA=C$ ナル処ノ任意ノ要素デアル。

## IV 應用

$$\int_0^1 K(x,u;s)K(u,y;t)\,du=K(x,y;s+t)$$

先ヅ此ノ場合ノ $A$ ニ相當スル要素（Idempotent）ヲ求メヨウ。

$K(x,y;0)=A(x,y)$ トオケバ

$$A(x,y)-\int_0^1 A(x,u)A(u,y)=0$$

之ハ第二種 Fredholm 積分方程式ノ homogen ナ場合デアル（$A(x,y)$ ヲ $x$ ノ函數トシテ考ヘテモ $y$ ノ函數トシテ考ヘテモ）．從ッテ Fredholm ノ定理ニヨリ各変数ニツキ高々有限個ノ一次的特立ナ函數ノ一次結合（Eigenfunktion 有限個）デアル、故ニ

$$A(x,y)=\sum_{i=1}^{h}f_i(x)g_i(y)$$

之ヲ $A^2=A$ ニ代入スレバ

$$\int_0^1 f_i(u)\,g_j(u)\,du=\delta_{ij}$$

次ニ $C$ ヲ求ムルニハ，$ABA=C$ ニヨリ結局

$$C(x,y)=\sum_{ij}^{k} C_{ij}\,f_i(x)\,g_i(y)$$

ニヲ任意ノ $k$ 次ノ matrix $(l_{ij})$ トスル時

$$\text{ニ}[f,g]=\sum_{ij}^{k} l_{i,j}f_i(x)\,g_j(y)$$

ナル記号ヲ用ヒレバ

$$K(x,y;t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n C^n}{n!}[f(x),g(x)]$$

トナル。但シ初項ハ $\sum_{i=1}^{k} f_i(x)\,g_i(y)$ デアル。

——— (以上) ———